现代应用数学丛书

可压缩流体理论

〔日〕河村龙馬 著

上海科学技术出版社

现代应用数学丛书

可压縮流体理論

〔日〕河村龙馬 著
刘 亦 珩 譯
谷 超 豪 等校



上海科学技术出版社

內容提要

本书是日本岩波书店出版的現代应用数学丛书之一的中譯本，对近代气体动力学的一些基本理論，作了比較系統的叙述。

全书共分八章。第1～5章是本书的基础部分，包括：理想气体的基本方程和微小扰动的基本性质；激波理論；二維定常势流基本方程的綫性化方法，即速度图法；小扰动法的綫性理論，以及研究利用超声速源点分布方法等內容。

第6～8章主要研究机翼理論，錐型流理論，并討論了跨声速流动的問題。这三章可看作是近代高速空气动力学的入門。

本书可供高等学校数学和力学专业师生及有关工程技术人員参考。

現代应用数学丛书

可压縮流体理論

原书名　压縮性流体の理論
原著者　〔日〕河村龙馬
原出版者　〔日〕岩波书店
譯者　刘亦珩
校者　谷超豪　苏德昌　黄城超

*

上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）
上海市书刊出版业营业許可証出093号
新华书店上海发行所发行　各地新华书店經售
商务印书館上海厂印刷

*

开本850×1168 1/32　印張4　字数92,000
1962年6月第1版　1962年6月第1次印刷
印数1～6,000

統一书号：13119·461
定价：[illegible]（十四）0.70元

出版說明

这一套书是根据日本岩波书店出版的"現代应用数学讲座"翻譯而成。日文原书共15卷60册，分成A、B两組，各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并，整理成42种，不另分組編号，陆續翻譯出版。

这套书涉及的面很广，其內容都和現代科学技术密切有关，有一定参考价值。每一本书收集的資料都比較丰富，而叙述扼要，篇幅不多，有利于讀者以較短时間掌握有关学科的主要內容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情况，但其方法可供参考。因此，翻譯出版这一套书，对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陆續出版的，写作时間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对內容的处理，为了尽可能地减少这种影响，我們在每一譯本中，特請譯者或校閱者撰写序或后記，以介紹有关学科的最近发展状况，并对全书內容作一些評价，提出一些看法，結合我国情况补充一些資料文献，在文內过于簡略或不足的地方添加了必要的注释和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志，为提高书籍的质量付出了巨大劳动，在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

譯 者 序

本书將近代气体动力学的一些基本理論，作了比較系統的叙述，可供具有流体力学基础知識的讀者作进一步学习的参考。

全书以二阶偏微分方程为主要工具，对于二維問題叙述得比較詳細，又提出了把方程綫性化的各种变換方法，就各个具体情况予以解决。只要具有大学理工科高等数学的水平，讀起来就不会感到十分困难。

全书共八章二十九节。第1章介紹理想气体的基本方程和微小扰动的基本性质。第2章介紹激波的理論。第3章介紹二維定常势流基本方程的綫性化的方法，即所謂速度图法，特别討論了Kármán–Tsien (錢学森)的方法。第4章討論小扰动法的綫性理論。第5章研究利用超声速源点分布的方法。这五章可以看作全书的基础部分。

以下第6第7章主要研究机翼理論和錐型流理論。第8章討論跨声速流动的問題。这三章可以看作近代高速空气动力学的入門。特别是，最后一章討論跨声速方程时，归結到所謂Tricomi混合型方程，用两个特例討論了它的解法。这类方程的数学处理是比較难的，本书提供了实例及解法，适宜于作为数学物理方程課程的补充教材。

本书譯竣，承谷超豪、苏德昌、黃城超三位同志校閱，提出了很多宝貴意見，在此表示衷心的感謝。

刘 亦 珩

目　录

第1章 基 本 方 程

§1 基 本 方 程

通常流体的运动都伴随着压力的变化。在流体的有一些运动中，由于压力变化而产生的密度变化是不能忽视的，研究这样的流体运动的学科叫做可压縮流体力学。本书将忽略流体的粘性和热傳导，而且只考虑理想气体。和这样的流体的运动有关的物理量是压力 p，密度 ρ，温度 T 和速度 $\boldsymbol{q}$. 联系这些量的基本方程有状态方程 (equation of state)，連續性方程 (equation of continuity)，运动方程 (equation of motion) 及能量方程 (equation of energy)。在物理空間中处理时，采用普通时間 t 和固定在空間的正交坐标系的三个分量 x, y, z 作为独立变量。

状态方程是气体热力学状态量 p, ρ, T 間存在着的一个关系式，在理想气体的情形下可写为如下的形式：

$$\frac{p}{\rho}=RT, \tag{1.1}$$

这里 R 叫做普遍气体常数，它是和 p, ρ, T 无关的常数。

連續方程是描述质量守恒定律的关系式，和不可压縮流体力学中完全类似，可表示为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho \boldsymbol{q})=0. \tag{1.2}$$

若令速度的 x, y, z 分量各为 u, v, w，則(1.2)也可写为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho w)=0. \tag{1.3}$$

运动方程是和不可压縮流体力学中的运动方程完全相同的。即是

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\\ \frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},\\ \frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.\end{aligned}\right\}\tag{1.4}$$

能量方程是由包含了动能的热力学第一定律再加上压力随时間变化所做的功得到的。它可以写为如下的形式:

$$\frac{DQ}{Dt}=\frac{D}{Dt}\left(c_pT+\frac{1}{2}q^2\right)-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t},\tag{1.5}$$

这里，Q 是由外部加入的热量，c_p 是定压比热，$\frac{D}{Dt}$ 表示对于实质部分的时間微分。在絕热变化($Q=0$)时，有

$$\frac{D}{Dt}\left(c_pT+\frac{1}{2}q^2\right)=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t}.\tag{1.6}$$

又在定常情形，有

$$c_pT+\frac{1}{2}q^2=\text{常数}.\tag{1.7}$$

在热傳导可以略去的情形，即使粘性不为零，(1.7) 也是成立的。由于粘性在流体内部引起摩擦生热的情形，只要流体元素是处在热絕緣状态，那么 (1.7) 仍是可以应用的。但是，正由于最初的假定，我們不仅忽略了热傳导性，而且連气体的粘性也加以忽略，这时当然不会有摩擦生热的現象，于是气体的状态变化完全是可逆的。这样的变化在热力学中叫做等熵变化 (isentropic)，这时 p 和 ρ 間有下列关系:

$$\frac{p}{\rho^\gamma}=\text{常数},\tag{1.8}$$

这里 γ 是定压比热和定容比热的比❶。服从 (1.7) 的变化叫做等能变化，而等熵变化是包含在等能变化之中的。在处理可以忽略粘性及热傳导的情形，用等熵关系 (1.8) 来代替能量方程 (1.7) 是更为方便的。(1.1) 到 (1.8) 这些关系式就是可压縮流体力学的基本方程。

§2 微小扰动的傳播，声波

我們来考虑在静止气体中給以非常小的扰动时的气体运动。为簡单起見，假定运动只限于 x 方向，而状态变化是等熵的。如果 u 和 $\frac{d\rho}{\rho}$ 都可看做一阶小量而其二阶以上的項均可略去，則由 (1.3) 得到

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0, \tag{2.1}$$

由 (1.4) 的第一式得到

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{2.2}$$

因为在 p 及 ρ 之間成立等熵关系式 (1.8)，所以可以写出

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_S\frac{\partial\rho}{\partial x},$$

这里标数 S 表示等熵变化。于是 (2.2) 可以改写为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-a^2\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x},\quad a^2=\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_S. \tag{2.3}$$

考虑到 a 是和 t 及 x 无关的量，所以由 (2.1) 及 (2.3) 消去 ρ 就得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{2.4}$$

❶ 依照这里的推导，(1.8) 右边的常数还可能和流綫有关，一般的等熵流应指 (1.8) 的右边的常数和地点无关的。——校者注

(2.4) 叫做波动方程。若令 f 和 g 是任意的函数，則 (2.4) 的一般解为

$$u=f(x-at)+g(x+at). \tag{2.5}$$

此式右边第一项表示用速度 a 向 x 正向傳播的扰动，第二項表示用同样的速度向 x 負向傳播的扰动。若仅考虑 $u=f(x-at)$ 时，这个扰动就以常速度 a 向 x 的正向进行而不改变形狀。这样的扰动就叫做声波，而 a 叫做声速。声波的傳播速度为 a 这一点，在三維情形通常也成立。

声速 a 在可压縮流体力学里占有重要的位置。用 (1.1) 及 (1.8)計算声速 a 时，得到

$$a^2=\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_S=\gamma\frac{p}{\rho}=\gamma RT, \tag{2.6}$$

即声速和 $\sqrt{T}$ 成正比。

結合(1.7)及(2.6)就可以求得定常流动的流速 q 和声速 a 的关系。如果考慮到 $c_p=\dfrac{\gamma}{\gamma-1}R$，就有

$$\frac{1}{2}q^2+\frac{a^2}{\gamma-1}=\text{常数}. \tag{2.7}$$

若設 $q=a$ 的状态的流速为 a^*，$q=0$ 时的声速为 a_0，則有

$$\frac{1}{2}q^2+\frac{a^2}{\gamma-1}=\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}a^{*2}=\frac{1}{\gamma-1}a_0^2, \tag{2.8}$$

a^* 叫做临界速度 (critical velocity)。又利用 (1.1)，則 (2.8) 可写为

$$\frac{1}{2}q^2+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}=\frac{1}{2}c^2=\frac{1}{\gamma-1}a_0^2, \tag{2.9}$$

这里标数 0 表示 $q=0$ 时的状态。又 c 是 $p=0$ 时的速度，叫做最大速度 (limiting velocity)。

§3 势　流

在流体力学里，环量 (circulation) Γ 及渦量 (vorticity) $\boldsymbol{\omega}$ 分别由下列公式定义：

$$\Gamma=\oint_C \boldsymbol{q}\cdot d\boldsymbol{r},\qquad \boldsymbol{\omega}=\operatorname{curl}\boldsymbol{q}, \tag{3.1}$$

这里 $d\boldsymbol{r}$ 是积分路綫 C 的弧素向量。若令以积分路綫 C 为截綫的任意曲面为 S，且 S 的法綫为 $\boldsymbol{n}$，則根据 Stokes 定理，在 Γ 与 $\boldsymbol{\omega}$ 之間成立如下的关系：

$$\Gamma=\oint_C \boldsymbol{q}\cdot d\boldsymbol{r}=\iint_S \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\omega}dS. \tag{3.2}$$

我們来考虑定义在和流体一起运动的閉曲綫 C 上的环量 Γ 随时間的变化：

$$\frac{D\Gamma}{Dt}=\frac{D}{Dt}\oint_C \boldsymbol{q}\cdot d\boldsymbol{r}=\oint_C\frac{D}{Dt}(\boldsymbol{q}\cdot d\boldsymbol{r})$$

$$=\oint_C\frac{D\boldsymbol{q}}{Dt}\cdot d\boldsymbol{r}+\oint_C \boldsymbol{q}\cdot\frac{D}{Dt}(d\boldsymbol{r}).$$

利用运动方程，得到

$$\frac{D\boldsymbol{q}}{Dt}\cdot d\boldsymbol{r}=-\frac{1}{\rho}(\operatorname{grad}p)\cdot d\boldsymbol{r}.$$

又因 $\frac{D}{Dt}(d\boldsymbol{r})=d\boldsymbol{q}$，所以有

$$\frac{D\Gamma}{Dt}=-\oint_C\frac{1}{\rho}(\operatorname{grad}p)\cdot d\boldsymbol{r}+\frac{1}{2}\oint_C d\boldsymbol{q}^2.$$

此式右边第二項显然为零，若 p 是 ρ 的单值函数时，則第一項也变为零。在等熵流动中这个关系是满足的，所以有 $\frac{D\Gamma}{Dt}=0$ 成立。于是在不可压縮流体力学里成立的 Kelvin 定理，又可以推广到忽略粘性和热傳导的可压縮流体的运动中。当物体在靜止着的这样

的流体中运动时，以及在无穷远存在着均匀流动的情形时，由于运动最初的环量为零，所以在流体的全部区域里恒有 $\Gamma=0$，又由(3.2)可以推知 $\boldsymbol{\omega}=0$。这样的流动叫做无旋流动 (irrotational flow)。若不能略去流体的粘性及热傳导，这时 Kelvin 定理就不能成立。这样的例子在本书第2章有激波的情形中将会遇到。

在无旋流动时有 $\boldsymbol{\omega}=0$，所以由(3.1)的定义，成立

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}=0. \tag{3.3}$$

这个关系式指出，在无旋流动时存在着依下面的式子所定义的速度势 Φ:

$$u=\frac{\partial \Phi}{\partial x},\quad v=\frac{\partial \Phi}{\partial y},\quad w=\frac{\partial \Phi}{\partial z}. \tag{3.4}$$

在这个意义上，无旋流动又叫做势流。

利用无旋条件改写基本方程。为方便起見，将坐标 x, y, z 改写为 $x_i\ (i=1, 2, 3)$，u, v, w 改写为 $u_i\ (i=1, 2, 3)$，且在同一项内含有两个相同标数时，就表示关于該标数自1到3作总和❶。

利用(3.3)可将运动方程(1.4)的左边写为

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial(u_j u_j)}{\partial x_i}$$

$$=\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial q^2}{\partial x_i},$$

于是运动方程变为

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}q^2\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i},$$

积分一次，得到

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}q^2+\int\frac{dp}{\rho}=F(t). \tag{3.5}$$

---

❶ 这就是所謂 Einstein 总和規約。——譯者注

方程(3.5)相当于不可压缩流体力学中的 Bernoulli 方程。左边第三项的积分可以用(1.6)来作出。

其次，我們来推导关于 Φ 的微分方程。将(1.4)左边乘以 u_i，且导入声速 $a^2=\dfrac{dp}{d\rho}$，则

$$\frac{1}{2}\frac{\partial(u_iu_i)}{\partial t}+u_iu_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=-\frac{a^2}{\rho}u_i\frac{\partial\rho}{\partial x_i},$$

利用(1.3)改写右边，得到

$$\frac{1}{2}\frac{\partial(u_iu_i)}{\partial t}+u_iu_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=a^2\frac{\partial u_i}{\partial x_i}+\frac{a^2}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}.$$

在(3.5)里把 $F(t)$ 看作包含在 Φ 之中，将它对于 t 求导数，则有

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial(u_iu_i)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{dp}{\rho}=0,$$

这里有 $\dfrac{\partial}{\partial t}\displaystyle\int\frac{dp}{\rho}=\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{a^2}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}dt=\frac{a^2}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}$，所以

$$\frac{a^2}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial(u_iu_i)}{\partial t}\right).$$

将此式代入前式消去 ρ，再导入 Φ，就可以得到微分方程

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i^2}=\frac{1}{a^2}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\partial x_j}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+2\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\partial t}\right]^{❶}. \quad (3.6)$$

(3.6)就是 Φ 的微分方程。不可压縮流动和 $a\to\infty$ 时的情形相当，此时右边消失，Φ 的微分方程变为 Laplace 方程。在 Laplace 方程中不含有对于 t 的导数，所以在不可压縮流动中不論是定常还是不定常的情形，Φ 的微分方程总是一样的。然而在可压縮流动的情形，由(3.6)可知，两者所滿足的微分方程是不同的，这是值得注意的。

特别在定常流动时，(3.6)变为

---

❶ 此式的左边也表示 $\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2}+\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x_3^2}$. ——校者注

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\partial x_j}, \tag{3.7}$$

这里声速 a 由(3.5)可当作速度 q 的函数求出来。即由

$$\frac{q^2}{2}+\int\frac{dp}{\rho}=\text{常数}$$

利用(1.8)及 $a^2=\frac{dp}{d\rho}$ 作計算，可以得到

$$\frac{q^2}{2}+\frac{a^2}{\gamma-1}=\frac{a_0^2}{\gamma-1}=\frac{U^2}{2}+\frac{a_\infty^2}{\gamma-1}, \tag{3.8}$$

这里 a_0 是 $q=0$ 的点的声速，U 及 a_∞ 各为无穷远的均匀流动的速度及声速。由(3.8)可知 a 是 q 的函数。

(3.7)是复杂的非綫性二阶偏微分方程。为簡单起見，我們只考虑二維流动。于是(3.7)变为

$$\left(1-\frac{u^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-2\frac{uv}{a^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}+\left(1-\frac{v^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=0. \tag{3.9}$$

具有两个独立变量的二阶偏微分方程的数学性质，是由其二阶項系数所作的判别式的正負来定的。若令(3.9)的判别式为 D，則有

$$D=\left(\frac{uv}{a^2}\right)^2-\left(1-\frac{u^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{a^2}\right)=\frac{q^2}{a^2}-1.$$

于是

$$\frac{q}{a}<1\text{ 时，}\quad D<0;$$

$$\frac{q}{a}=1\text{ 时，}\quad D=0;$$

$$\frac{q}{a}>1\text{ 时，}\quad D>0.$$

当 $D<0$ 时，二阶偏微分方程叫做椭圆型的，$D=0$ 时叫做抛物型的，$D>0$ 时叫做双曲型的。另一方面，$\frac{q}{a}$ 是流速与声速之比，通常叫做 Mach 数。Mach 数小于1时叫做亚声速，大于1时叫做超声速。上述結果表示，当流动状态是亚声速时，其基本方程(3.9)

是椭圓型的，而当流动是超声速时，其基本方程是双曲型的。正如在偏微分方程理論中早已詳細研究过的，椭圓型微分方程的問題，是在包圍着区域的閉边界上給出函数或其法向微商的值，而求区域里的解 (Dirichlet 問題❶)。作为不可压縮流体力学的基础的 Laplace 方程就是这一类型方程的典型例子。于是不可压縮流动的性质，例如在孤立奇点以外不再有間断存在，或者扰动在全区域所有方向上傳播等等，在亚声速流动里也都能定性地成立。另一方面，双曲型微分方程的典型的例子是波动方程，在包圍着区域的一部分边界上給出函数値及法向微商的値时可以决定其解 (Cauchy 問題❷)。于是在椭圓型时处理边値問題，在双曲型时处理初値問題，两者的解的性质根本不同。在双曲型时，扰动所及的范圍仅限于全区域的一部分，而且具有在某些特定曲綫或曲面上一阶以上导数可以有間断的特性。于是对于超声速流动，由不可压縮流动或亚声速流动所作的类推是不能成立的。即使在三維定常流动的情形，其微分方程在亚声速情形也是椭圓型的，在超声速情形也是双曲型的，在其各个区域里的流动特性和二維的情形是一样的。

---

❶ 应添上"和 Neuman 問題"。——校者注

❷ 这里对双曲型方程的 Cauchy 問題的提法是很不确切的。同时在力学中所遇到的，通常也有其他的边界問題，可参閱谷超豪等編的《数学物理方程》，第二版，上海科学技术出版社出版。——校者注

第2章　激波理論

§4　不定常一維流动和激波的发生

在§2里曾說过静止气体里所发生的微小扰动，以常速度a(声速)傳播。在这里将处理大振幅扰动的傳播問題。若就一維运动討論时，由(1.3)和(1.4)基本方程可以写成如下的形式：

$$\rho_t+u\rho_x+\rho u_x=0 \tag{4.1}$$

$$u_t+uu_x=-\left(\frac{1}{\rho}\right)\left(\frac{dp}{d\rho}\right)\rho_x, \tag{4.2}$$

这里的标数x及t表示这些量关于x及t的导数，且p及ρ間有关系(1.8)成立。

要求出这些方程的一般解是非常困难的，所以在此不仅假定p是ρ的单值函数，而且还假定u也是这样的。将(4.1)变形就得

$$(d\rho/du)\,(u_t+uu_x)=-\rho u_x,$$

将此式代入(4.2)而整理之，便得到下列式子：

$$du=\pm\sqrt{(dp/d\rho)}\,(d\rho/\rho).$$

今若設 $a=\sqrt{(dp/d\rho)}$，則

$$d\rho/\rho=\pm du/a. \tag{4.3}$$

利用(1.8)求a与ρ的关系，得到

$$a=\sqrt{\frac{dp}{d\rho}}=\sqrt{\gamma\frac{p_0}{\rho_0}}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}}=a_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}}, \tag{4.4}$$

这里标数0表示静止气体中的值。将(4.4)代入(4.3)得

$$\pm u=\frac{a_0}{\rho_0^{\frac{\gamma-1}{2}}}\int_{\rho_0}^{\rho}\rho^{\frac{\gamma-1}{2}-1}d\rho=\frac{2a_0}{\gamma-1}\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}}-1\right], \tag{4.5}$$

或者利用(4.4)，得

$$a=a_0\pm(\gamma-1)u/2 \tag{4.6}$$

然而，在 u 及 ρ 的变化趋向无限小的极限情形，以上这些关系必須和 §2 所处理的声波的情形一致。早已在(2.5)指出，在声波的情形，向着 x 的正向进行的前进波取 $u=f(x-at)$ 的形状。于是有

$$u_t=-af'=-au_x,$$

将上式代入(2.2)，得

$$-au_x=-(1/\rho)a^2\rho_x,$$

即在声波的情形，前进波中 u 与 ρ 的变化同符号。为了使在这里所处理的有限振幅波的情形取极限时也和声波时一致，所以对于前进波，在(4.3)以下各关系式里，必須取复号的上边的符号。

现在若仅考虑前进波时，由(4.1)及(4.3)有

$$\rho_t+(u+a)\rho_x=0, \tag{4.7}$$

又由(4.2)可得

$$u_t+(u+a)u_x=0. \tag{4.8}$$

这些方程的解由下式表示：

$$\rho=F[x-(u+a)t], \qquad u=G[x-(u+a)t]. \tag{4.9}$$

(4.9)表示 ρ 或 u 的扰动沿 x 正向以速度 $u+a$ 傳播。因为 u 是气体质点的移动速度，所以此时仍可将 a 解释为声速。只是在无限小振幅声波的情形声速是常数，而在有限振幅情形，由于不能忽略波自身誘导出来的质点速度，所以由(4.6)可知，声速 a 对于場所及时間不是常数。有限振幅波的前进速度在前进波的情形为

$$u+a=a_0+(\gamma+1)u/2, \tag{4.10}$$

于是 u 愈大則傳播也愈快。

将上述有限振幅波的理論，用活塞运动所生成的波动为例作一现象的說明。在截面面积为常数的筒的一端有一个活塞，設它从 $t=0$ 时开始运动。令由活塞最初位置沿筒軸量得的长度为 x。

在图 4.1 所表示的 xt 平面上，若設曲綫 OP 表示活塞的运动軌迹，那么其速度 u 用 OP 的梯度的倒数来表示。在活塞前边的气体质点被活塞推动而和它用同一速度 u 向 x 方向移动，但由 (4.9) 可知，这个扰动的傳播速度是 $dx/dt=u+a$。且由 (4.6) 可知，a 只是 u 的函数，所以自 OP 上的任意一点 A 所作的直綫 AB，表示由活塞运动所产生的扰动波面。AB 具有梯度

$$dx/dt=u+a=a_0+(\gamma+1)u/2$$

(在上式里，u 是在 A 点的活塞速度，a_0 是活塞运动开始前靜止气体中的声速)。在这扰动波面上气体状态(速度、压力及密度)是常量。图 4.1 表示活塞速度为正且速度随着时間逐漸增加时的波动。此时愈在后面产生的扰动，u 愈大，于是傳播速度也就变大了。与此相对的，图 4.2 表示活塞在負的方向速度随着时間逐漸

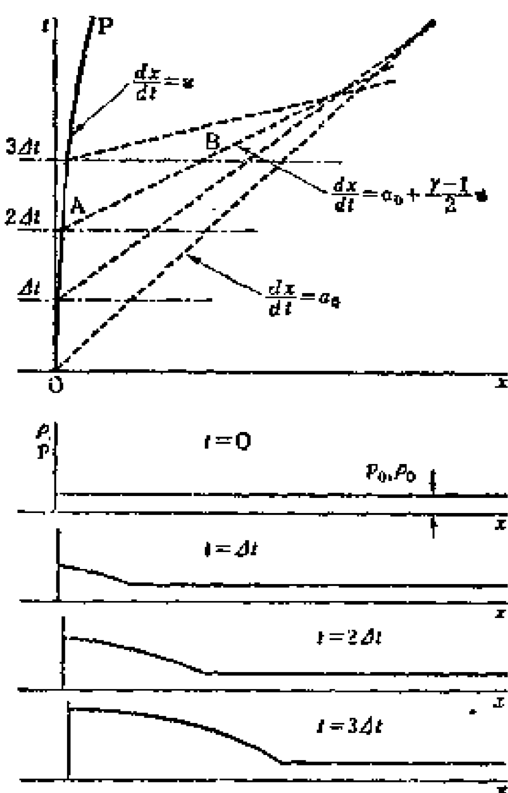


图 4.1 压縮波的傳播

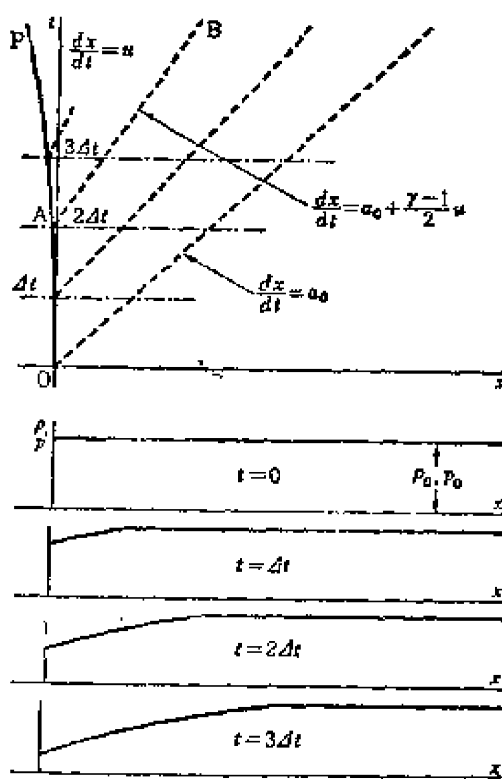


图 4.2 膨脹波的傳播

增加的运动。因为 u 是负的，所以傳播速度的性质和图 4.1 的情形完全相反。于是在图 4.1 的情形产生波面的交叉，而在图 4.2 的情形波面却象扇而那样展开。在前进波的情形，由(4.3)可知，du 和 $d\rho$ (从而 dp) 是同符号的，所以图 4.1 表示压縮波而图 4.2 表示膨脹波。在各图下側都定性地表示出在 $t=0$, Δt, … 时管内的压力分布。从这里可以看出，在图 4.1 里波形随着时間增长而漸趋急峻，图 4.2 的波形則漸趋平緩。在图 4.1 的情形，xt 平面上波面相交处的压力梯度变成无穷大。

上面的理論是在 p 和 ρ 間有等熵关系的假定下作成的。但是在所有的眞实气体里粘性及热傳导不完全为零。而且粘性及热傳导的作用与速度梯度及温度的二阶梯度成正比，因此在压縮波漸趋急峻时就不能忽略粘性及热傳导的影响。而且正由于粘性及热傳导的作用，才避免了压縮波的梯度变成无穷大，而压縮波保持着一定的波形用一定的速度进行。这样的波叫做激波(shock wave)。在膨脹波的情形，如图 4.2 所示，波面随着时間漸趋和緩，所以不会有激波发生。

由以上可知，有限振幅的压縮波最終形成激波。把激波内部作为整体来看，它和外部沒有热量的交换，但由于产生了气体质点摩擦生热和质点間热傳导的不可逆現象，根据热力学第二定律，通过波面的气体的熵要增大。从而对于激波来說，p 和 ρ 間不存在等熵关系。

定常运动的激波的内部构造，若将粘性及热傳导加以考虑后，是可以用流体力学的方法計算的。計算結果表明，在一般情形下，激波内部的状态变化，大部分是在和分子平均自由路程同一程度的狹小范圍内发生的。于是用把流体看作連續介质的流体力学的观点，就能把激波看成一个間断面来处理。本书就是用这样的观点写成的。

§5 正 激 波

我們来考虑定常运动的平面激波。取随着激波一起运动的坐标系。設和这个坐标系相应的波面正交的速度为u,平行于波面的速度分量为零(图5.1)。这样的波面和流动正交的激波,称为正激波。由§4所述,可将激波看作厚度为零的間断面,而且在緊接間断面的前后都存在着均匀的流动。設气体的压力为p,密度为ρ,用标数1,2表示激波上游和下游的状态。

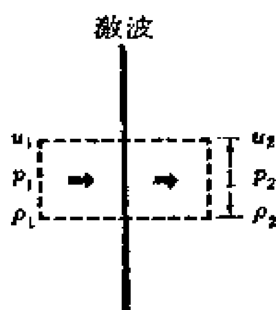


图 5.1

如图5.1所示,取交截激波面的单位截面面积为考察面,考虑流出和流进考察面的质量,就可以得到如下的連續方程:

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 . \tag{5.1}$$

又在同一考察面上,在u方向作用的压力和同方向的动量的流出和流进所作成的动量方程是

$$\rho_2 u_2^2 - \rho_1 u_1^2 = p_1 - p_2,$$

或

$$\rho_1 u_1^2 + p_1 = \rho_2 u_2^2 + p_2 . \tag{5.2}$$

第三个方程可由能量守恒定律求出。气体质点通过激波时,由于粘性摩擦生热,又由于热傳导而和其他质点間进行热交换。但作为整体来看,它和外部沒有热量的交换,所以通过图5.1考察面流进和流出的质点的单位质量的全部能量是相等的。此时的能量方程已由(2.9)給出,将它应用到現在的情形,就可以写成

$$\frac{1}{2}u_1^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{1}{2}u_2^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_2}{\rho_2}. \tag{5.3}$$

(5.1),(5.2),(5.3)三个方程是决定由正激波所产生气流的物理量变化的基本公式。它們是对于六个未知量u_i, p_i, ρ_i $(i=1, 2)$的三个联立方程,因此給出未知量中的任意三个时,就可以求出其

余的三个。特别是激波前后的速度比、压力比及密度比之間的关系最为重要。

首先由这三个基本公式消去 u_1 及 u_2，則可以得到下面的压力比和密度比之間的关系式：

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{1+[(\gamma+1)/(\gamma-1)](p_2/p_1)}{(\gamma+1)/(\gamma-1)+(p_2/p_1)}, \tag{5.4}$$

(5.4) 叫做 Rankine-Hugoniot 关系式。为了比較这个关系式同等熵变化的关系，令

$$\frac{p_2}{p_1}=1+\varepsilon, \quad \varepsilon\ll 1.$$

将这两个关系对 ε 展开，則对 Rankine-Hugoniot 关系有

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}=1+\frac{1}{\gamma}\varepsilon-\frac{\gamma-1}{2\gamma^2}\varepsilon^2+\frac{(\gamma+1)^2}{4\gamma^3}\varepsilon^3+\cdots,$$

对等熵关系有

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}=1+\frac{1}{\gamma}\varepsilon-\frac{\gamma-1}{2\gamma^2}\varepsilon^2+\frac{(\gamma-1)(2\gamma-1)}{6\gamma^3}\varepsilon^3+\cdots.$$

于是在 $\varepsilon=0$ 的邻域里(非常弱的激波)，压力和密度关系曲綫和等熵曲綫likewise間直到曲率是一致的。又对于很强的激波

$$\frac{p_2}{p_1}\to\infty \text{ 时}, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{\gamma+1}{\gamma-1}.$$

此时 (5.4) 所給出的压力比和密度比之間的关系可表示如图 5.2。在同一图內，为了便于比較，我們也把等熵关系用虛綫表示出来。

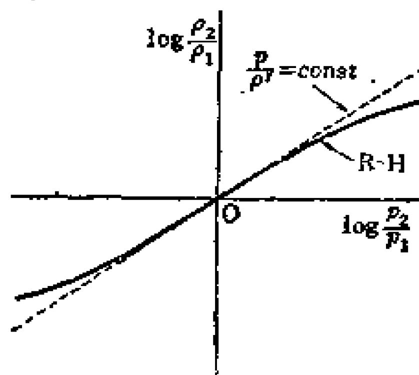


图 5.2 Rankine-Hugoniot 关系

理想气体单位质量的熵 S 为

$$S=c_p\log\left(\frac{T}{p^{(\gamma-1)/\gamma}}\right),$$

因此通过激波的 S 的变化可用

$$\Delta S = S_2 - S_1 = c_p \log\left(\frac{T_2}{T_1}\right)\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} \tag{5.5}$$

来計算。由图 5.2 可知，在压縮的情形下，对于同一的 $\frac{p_2}{p_1}$，$\frac{T_2}{T_1}$ 的值在激波的情形比等熵变化情形为大。在等熵变化时 $\Delta S=0$，所以对于激波

$$p_2/p_1 \geqslant 1 \text{ 时}, \quad S_2 \geqslant S_1,$$

对于 $p_2/p_1<1$ (膨脹)，則有完全相反的关系成立，卽

$$p_2/p_1 < 1 \text{ 时}, \quad S_2 < S_1.$$

另一方面，按照热力学第二定律，在象激波那样和外部沒有热量交換的絕热变化情况下，必須有 $\Delta S \geqslant 0$，所以上述第二种情形不会发生。于是激波必須是压縮波。这个事实是和 § 4 中所說的激波发生过程是一致的。

其次，若假定定常流动中一般的点的流速为 u，声速为 a，压力为 p，密度为 ρ，那么能量方程由 (2.9) 給出为

$$\frac{1}{2}u^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2}u^2 + \frac{a^2}{\gamma-1}$$

$$= \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}a^{*2} = \frac{1}{2}c^2, \tag{5.6}$$

这里 a^* 和 c 是常数，在一条流綫上保持一定。按照 (5.6) 可使 (5.3) 的两边等于 $(\gamma+1)a^{*2}/2(\gamma-1)$。利用这个关系和 (5.1)，(5.2) 可以消去 p 及 ρ，得到

$$u_1 u_2 = a^{*2}, \tag{5.7}$$

这叫做关于激波的 Prandtl 关系式。在 (5.6) 内設 $M=u/a$，$M^*=u/a^*$，則 M 和 M^* 間的关系变成如下的形式：

$$M^{*2} = \frac{\gamma+1}{(\gamma-1)+2/M^2}, \tag{5.8}$$

按定义这里的 M 是流动 Mach 数。由 (5.8) 可知，当 $M \geqslant 1$ 时有

$M^*\geqslant 1$，当 $M<1$ 时有 $M^*<1$. 另一方面，由(5.7)有 $M_1^*M_2^*=1$，所以 $M_1>1$ 时有 $M_2<1$, $M_1<1$ 时有 $M_2>1$. 但是如图 5.2 所示，在激波的前后 $T_2>T_1$，从而 $p_2/\rho_2>p_1/\rho_1$，因此根据 (5.3) 非有 $u_1>u_2$ 不可。从而有 $M_1^*>M_2^*$，所以在激波的情形必有 $M_1>1$ 及 $M_2<1$. 就是說，若考虑和激波的相对运动时，则流入的流动是超声速的，而流出的流动是亚声速的。

利用 (5.7) 和 (5.8) 之后，激波的上游和下游的 Mach 数 M_1 及 M_2 間的关系，变成如下的形式：

$$M_2^2=\frac{1+(\gamma-1)M_1^2/2}{\gamma M_1^2-(\gamma-1)/2}. \tag{5.9}$$

由(5.1)及(5.2)消去 ρ_2/ρ_1，再将 (5.7)，(5.8)，(5.9)代入，用上游的 Mach 数表示出压力比时，则有

$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{2\gamma}{\gamma+1}M_1^2-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}. \tag{5.10}$$

于是当 $M_1\to 1$ 时，有 $p_2/p_1\to 1$，卽激波变为声波。

令激波上游的流动等熵滞止的点，卽駐点的压力、密度、温度分别記为 p_0, ρ_0, T_0 則有

$$\frac{p_1}{\rho_1^\gamma}=\frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \quad 或 \quad \frac{T_1}{p_1^{(\gamma-1)/\gamma}}=\frac{T_0}{p_0^{(\gamma-1)/\gamma}}.$$

若用带撇“′”的字母表示下游駐点的状态参量时，完全同样地有

$$\frac{T_2}{p_2^{(\gamma-1)/\gamma}}=\frac{T_0'}{p_0'^{(\gamma-1)/\gamma}}.$$

在(5.3)内令 $u_1=u_2=0$，可得 $T_0=T_0'$，所以由上面两式得到

$$\left(\frac{p_0'}{p_0}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}=\left(\frac{T_1}{T_2}\right)\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma},$$

代入(5.5)，得

$$-\frac{\gamma-1}{\gamma}\log\left(\frac{p_0'}{p_0}\right)=\frac{\Delta S}{c_p}. \tag{5.11}$$

若設 c_v 是定容比热，則有 $\gamma=c_p/c_v$. 正如前面所述 $\Delta S\geqslant 0$，所以

由(5.11)有 $p_0 \geqslant p_0'$，卽在激波下游的总压比上游的小。若用 Mach 数 M_1 表示总压比时，则有

$$\frac{p_0}{p_0'} = \left\{\frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right\}^{1/(\gamma-1)} \left\{\frac{(\gamma-1)M_1^2/2+1}{(\gamma+1)M_1^2/2}\right\}^{\gamma/(\gamma-1)}. \tag{5.12}$$

利用(5.11)，(5.12)可将 ΔS 表示为 M_1^2 的函数。考虑弱激波时有 $M_1^2-1 \ll 1$ 而对于 (M_1^2-1) 展开 ΔS，则得

$$\frac{\Delta S}{c_v} = \frac{2\gamma}{3(\gamma+1)^2}(M_1^2-1)^3 + O[(M_1^2-1)^4]. \tag{5.13}$$

另一方面，由(5.10)，(5.4)，(5.1)可知 $(p_2-p_1)/p_1$，$(\rho_2-\rho_1)/\rho_1$，$(u_2-u_1)/u_1$ 都是 $O[(M_1-1)]$ 的。于是处理压力、密度及速度的变化均为一阶小量的弱激波时，ΔS 变成三阶小量，所以熵的变化可以忽略。

§6 斜 激 波

激波面和流入激波面的流动不正交时，这激波叫做斜激波 (oblique shock)。斜激波和§5中所說的正激波，在全部区域内迭加上平行于該波面的速度 v 所得的状态是等价的。加上这样的分速度时，气体的压力和密度不发生变化。按图6.1所示記号作斜激波的基本方程时，首先連續方程和在波面正交方向的动量方程可写为

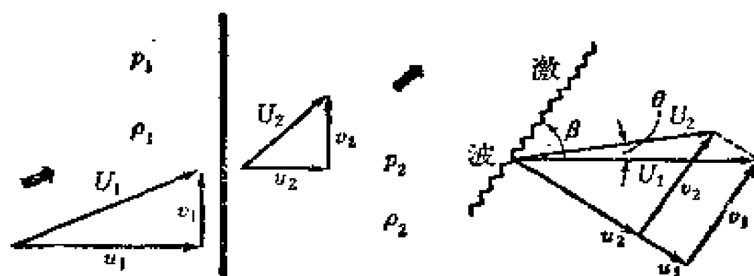


图6.1 斜激波引起的速度变化

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \tag{6.1}$$

$$\rho_2 u_2^2 - \rho_1 u_1^2 = p_1 - p_2, \tag{6.2}$$

平行于波面的动量方程为

$$\rho_1 u_1 (v_2 - v_1) = 0 \quad \text{即} \quad v_2 = v_1 = v. \tag{6.3}$$

其次考虑到速度的絕对值为 $\sqrt{u^2+v^2}$ 时，由(2.9)可知能量方程为

$$\frac{1}{2}(u_1^2+v_1^2) + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{1}{2}(u_2^2+v_2^2) + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_2}{\rho_2}$$

$$= \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} a^{*2},$$

或利用(6.3)改写为

$$\frac{1}{2}u_1^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{1}{2}u_2^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_2}{\rho_2}$$

$$= \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}\left(a^{*2} - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}v^2\right), \tag{6.4}$$

这里 a^* 是臨界速度。

以上是联系斜激波前后状态的关系式。其中(6.1)，(6.2)和对于正激波的(5.1)，(5.2)在形式上是完全相同的。又(5.3)两边根据(5.6)等于 $(\gamma+1)a^{*2}/2(\gamma-1)$，所以对于正激波的能量方程施行变换

$$a^{*2} \to a^{*2} - [(\gamma-1)/(\gamma+1)]v^2, \tag{6.5}$$

就可以得到斜激波的能量方程。结果只須在§5中所求得的正激波的公式里施行变换(6.5)就可以簡单地得到联系斜激波前后的量的关系式。但必須注意，此时的 u 不是流动的全速度，而是和激波面正交的速度分量。

首先，对于正激波的压力比和密度比間的 Rankine–Hugoniot 关系(5.4)是和 a^* 无关地求得的，所以在斜激波时也原封不动地成立。即

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1+[(\gamma+1)/(\gamma-1)](p_2/p_1)}{(\gamma+1)/(\gamma-1)+p_2/p_1} = \frac{u_1}{u_2}. \tag{6.6}$$

其次，考虑到(6.5)时，Prandtl 关系式可写为

$$u_1u_2=a^{*2}-[(\gamma-1)/(\gamma+1)]v^2. \qquad (6.7)$$

由图 6.1 所表示的速度图显然可知，若設激波上游的流动和激波面所成的角为 β，由于激波面所产生的流动偏角为 θ，则有

$$u_1/v=\tan\beta, \quad u_2/v=\tan(\beta-\theta).$$

由上两式和(6.4)可得

$$u_1\frac{\tan(\beta-\theta)}{\tan\beta}=a^{*2}-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}v^2,$$

将此式代入(6.4)内，并令 $\gamma p_1/\rho_1=a_1$，$u_1/a_1=M_1\sin\beta$ (M_1 是上游流动 Mach 数)，最后可得

$$\frac{1}{\tan\theta}=\tan\beta\left(\frac{\gamma+1}{2}\frac{M_1^2}{M_1^2\sin^2\beta-1}-1\right). \qquad (6.8)$$

于是若給出上游的 Mach 数和激波角，就可以决定 θ 角。

对于和激波面正交的速度分量 u_1，u_2 所作的 Mach 数，必有关系(5.9)成立。所以对于(5.9)施行变换

$$M_1\to M_1\sin\beta, \quad M_2\to M_2\sin(\beta-\theta),$$

可得到下面的式子：

$$M_2^2\sin^2(\beta-\theta)=\frac{1+[(\gamma-1)/2]M_1^2\sin^2\beta}{\gamma M_1^2\sin^2\beta-(\gamma-1)/2}. \qquad (6.9)$$

对于(5.10)及(5.12)也可以施行同一变换，得到

$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{2\gamma}{\gamma+1}M_1^2\sin^2\beta-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}$$

$$\frac{p_0}{p_0'}=\left[\frac{2\gamma}{\gamma+1}M_1^2\sin^2\beta-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right]^{1/(\gamma-1)}$$

$$\cdot\left[\frac{1+[(\gamma-1)/2]M_1^2\sin^2\beta}{[(\gamma+1)/2]M_1^2\sin^2\beta}\right]^{\gamma/(\gamma-1)}. \qquad (6.10)$$

再次，考虑激波前后的速度变化。为此，稍稍变更坐标系，在

这里取上游的流动方向为 x 軸，取 y 軸与它正交，令上游速度的 x, y 分量为$(U,0)$，下游的速度分量为(u, v). 由速度图显然可得

$$u_1=U\sin\beta,\quad v_1=U\cos\beta,$$

$$u_2=u_1-v/\cos\beta=U\sin\beta-v/\cos\beta,$$

将这些值代入(6.7)，可以得到

$$\frac{U^2}{\gamma+1}(\gamma-\cos 2\beta)=a^{*2}+Uv\tan\beta.$$

另一方面，在新速度分量間有关系式 $v\tan\beta=U-u$，所以利用这关系从上式消去 β，就得到只含速度分量的关系式

$$v^2=(U-u)^2\frac{u-a^{*2}/U}{[2/(\gamma+1)]U+a^{*2}/U-u}. \qquad (6.11)$$

若使用由 $u=\bar{u}a^*$, $v=\bar{v}a^*$, $U=\bar{U}a^*$ 所定义的无量綱速度分量，則上式可写为

$$\bar{v}^2=(\bar{U}-\bar{u})^2\frac{\bar{u}-(1/\bar{U})}{[2/(\gamma+1)]\bar{U}+(1/\bar{U}-\bar{u})}. \qquad (6.12)$$

(6.12)給出了激波上游和下游的速度分量間的关系。激波恒为压縮波，激波后的压力上升而速度减少。于是(6.12)中在范圍 $\bar{U}<\sqrt{\bar{u}^2+\bar{v}^2}$ 里没有物理意义。考虑到这个条件而画出(6.12)所給出的 $\bar{u}$, $\bar{v}$ 曲綫时，对于 $\bar{U}$ 的一个值，可以得到如图 6.2 所示的一条閉曲綫。这条曲綫叫做激波极綫(shock polar)。这条曲綫表示在流入速度为 $\bar{U}$ 的流动內，以各种不同角度存在的激波后面的速度图。于是在速度为 $\bar{U}$ 的均匀流动內存在曲面激波的情形下，这条曲綫又可以解释为表示紧接激波后面的速度图。在图 6.3 里，設 $(\bar{U}, 0)$ 的点为 A，极綫上的

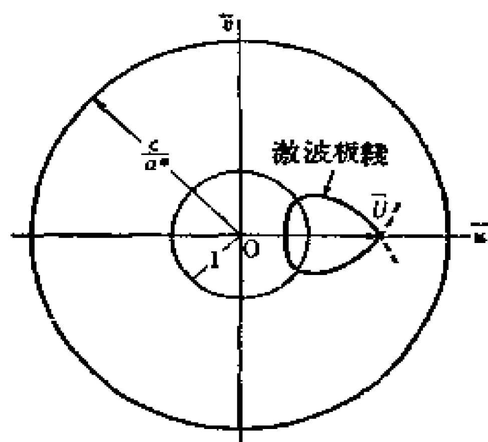


图 6.2 激波极綫

一点为 P. A 点是由激波所产生的速度变化为零的点，即和 Mach 波对应的点。根据由 P 点对应的激波，速度向量由 $\overrightarrow{OA}$ 变成 $\overrightarrow{OP}$. 从而速度变化的方向和 $\overrightarrow{AP}$ 一致。又由(6.3)也可以明了，对于激波在波面平行的方向上的速度并不发生变化，所以 $\overrightarrow{AP}$ 必须和波面正交。于是自原点 O 向 $\overrightarrow{AP}$ 所作垂綫 OB 給出激波的方向，而且角 $AOB=\beta$（激波角）。又角 $AOP=\theta$（流动偏角）。

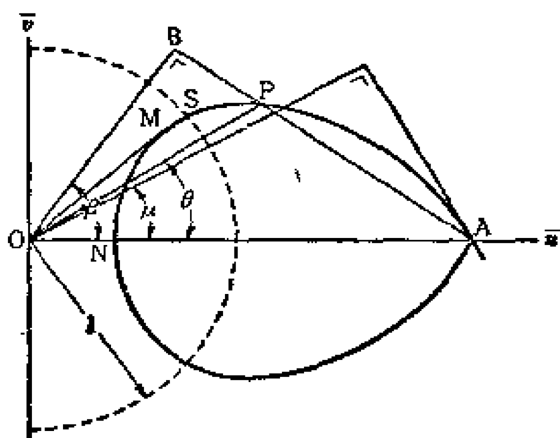


图6.3 激波极綫

今若考虑 P 点趋近于 A 的极限情形，则因 $\theta\to 0$，所以由(6.8)有 $M_1^2\sin^2\beta\to 1$，于是角 AOB 的正弦 $\to\pm 1/M$. 即自原点向 A 点的激波极綫的切綫所作的垂綫和 $\bar{u}$ 軸所成的角的正弦 $=1/M=a_1/U$（a_1 是激波上游的声速）。这个事实表明，对应于 A 点的激波是强度为无穷小的声波。这样的波叫做 Mach 波，角 μ 叫做 Mach 角。

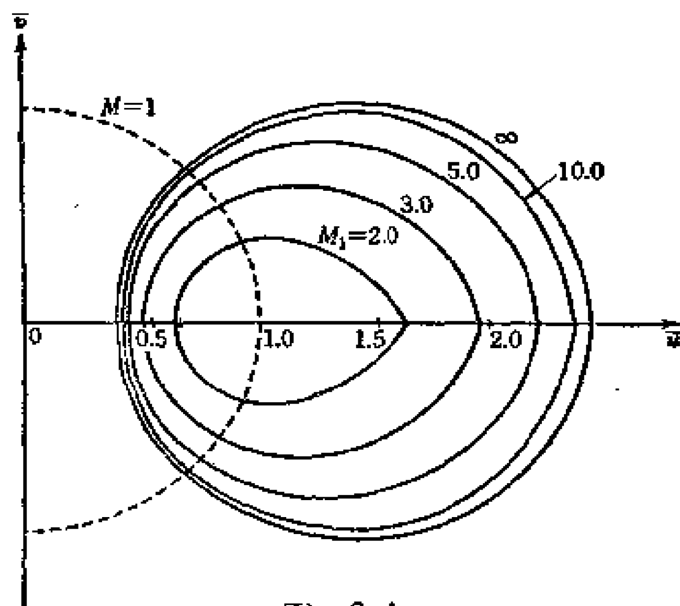


图　6.4

其次，介激波极綫和 $\bar{u}$ 軸的交点为 N。在此点显然有 $\bar{v}=0$，从而 $\theta=0$，可知这是和(6.8)中 $\beta=\pi/2$ 相对应的。即 N 点表示正激波后的状态。在激波极綫上，P 点自 A 移动到 N 的过程里，角 $AOP(=\theta)$ 自零到达某个最大值而后再回到零。θ 的最大值由自原点 O 到激波极綫所作的切綫和 $\bar{u}$ 軸的夹角給出。这个切点 M 叫做最大偏角点。

若介 $\overline{U}=U/a^*=M^*$，在 $\bar{u}$，$\bar{v}$ 平面上可以決定一条与 M^* 对应的激波极綫。由(5.8)可知，M^* 是 Mach 数 M 的函数，所以可以画出对应于激波上游的 Mach 数 M 的激波极綫。图 6.4 就是用这样求得的 M 当作参数的激波极綫族。这里是将比热比的值取空气时的值 1.40 而計算的。

第3章 速度图法

§7 速度图方程

定常势流的基本方程(3.7)是复杂的非綫性方程，我們还不知道求其准确解的一般方法。在数学处理上，最大的困难是(3.7)乃非綫性的，所以它的解不能迭加起来。但当流动是二維的情形时，我們知道，利用独立变量自物理平面上的坐标到速度分量的变换可将(3.7)綫性化。这个方法叫做**速度图法**(hodograph method)。速度图方程是綫性的，它的数学处理比(3.7)容易得多，但这个方法也有一个根本的缺陷，即是物理平面上給出的边界条件預先变换到速度平面一般是不可能的，而且这个方法也不能适用于一般的三維流动。現在我們首先推导速度图方程。

在二維流动时，設坐标为 x, y，且令 x, y 軸方向的速度分量各为 u, v。势函数 Φ 定义为

$$u=\partial\Phi/\partial x, \quad v=\partial\Phi/\partial y. \tag{7.1}$$

利用(3.7)，Φ 的微分方程可写为

$$\left(1-\frac{u^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-2\frac{uv}{a^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}+\left(1-\frac{v^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=0. \tag{7.2}$$

在此，由(3.8)可知，声速 a 是 $q^2=u^2+v^2$ 的函数，所以(7.2)中 Φ 的二阶导数的系数都只是 u 及 v 的函数。在这样的情形下我們說(7.2)是可以化約的，且可能利用 x, y 到 u, v 的独立变量变换而归結到綫性方程。这样的变换通常多采用 Legendre 变换。为了方便，此处我們介紹同时使用 Φ 及流函数 Ψ 的方法。由二維定常流动的連續方程

$$\partial(\rho u)/\partial x+\partial(\rho v)/\partial y=0,$$

用如下的式子来定义流函数 Ψ:

$$(\rho/\rho_0)u=\partial\Psi/\partial y,\quad (\rho/\rho_0)v=-\partial\Psi/\partial x, \tag{7.3}$$

这里标数 0 表示速度为零的点的值。

在此所处理的势流里，速度 q，压力 p 及密度 ρ 之間关系式 (1.8) 及 (3.5) 成立，所以 p 及 ρ 都只是 $q=\sqrt{u^2+v^2}$ 的函数，其形式如下:

$$\frac{p}{p_0}=\left[1-\frac{\gamma-1}{2}\frac{q^2}{a_0^2}\right]^{\gamma/(\gamma-1)}, \tag{7.4}$$

$$\frac{\rho}{\rho_0}=\left[1-\frac{\gamma-1}{2}\frac{q^2}{a_0^2}\right]^{1/(\gamma-1)}. \tag{7.5}$$

于是 (7.1) 及 (7.3) 成为六个未知数(Φ, Ψ, u, v, x, y)的四个联立方程，由此消去 x, y 则得关于 $\Phi=\Phi(u, v)$, $\Psi=\Psi(u, v)$ 的两个方程。

若用速度的絕对值 q 及 x 軸与流綫所成的角 θ 代替 u, v 时，可写出

$$u+iv=qe^{i\theta},\quad u=q\cos\theta,\quad v=q\sin\theta. \tag{7.6}$$

而 Φ, Ψ 又是 x, y 的函数，所以

$$\left.\begin{aligned} d\Phi&=\Phi_x dx+\Phi_y dy=q(\cos\theta\,dx+\sin\theta\,dy),\\ d\Psi&=\Psi_x dx+\Psi_y dy=(\rho/\rho_0)q(-\sin\theta\,dx+\cos\theta\,dy),\end{aligned}\right\} \tag{7.7}$$

这里的标数 x, y 表示这些量分别对于 x, y 的导数。

将 (7.7) 对 dx, dy 解出，得

$$\left.\begin{aligned} dx&=(\cos\theta/q)d\Phi-(\rho_0/\rho)(\sin\theta/q)d\Psi,\\ dy&=(\sin\theta/q)d\Phi+(\rho_0/\rho)(\cos\theta/q)d\Psi.\end{aligned}\right\} \tag{7.8}$$

另一方面，可将 Φ, Ψ 看作是 q 及 θ 的函数，所以也可以写出

$$d\Phi=\Phi_q dq+\Phi_\theta d\theta,$$

$$d\Psi=\Psi_q dq+\Psi_\theta d\theta.$$

将此两式代入(7.8)右边而整理之，可得如下的复数表示式：

$$dz = dx + i\,dy$$
$$= e^{i\theta}\left[\left\{\frac{1}{q}\frac{\partial\Phi}{\partial q} + i\frac{\rho_0}{\rho}\frac{1}{q}\frac{\partial\Psi}{\partial q}\right\}dq + \left\{\frac{1}{q}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} + i\frac{\rho_0}{\rho}\frac{1}{q}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right\}d\theta\right]. \qquad (7.9)$$

若 Φ 及 Ψ 为 q 及 θ 的函数，则由(7.9)可决定 q, θ (或 u, v) 和 x, y 的对应关系。

其次求以 q 及 θ 作为独立变量时的 Φ 及 Ψ 的微分方程。在(7.9)的右边，dq 及 $d\theta$ 的系数各等于 $\partial z/\partial q$ 及 $\partial z/\partial\theta$，分别再对 θ 及 q 求导数，其結果必須相等。計算后再分开实部和虚部就得到如下的結果：

$$\frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial q} = \frac{1}{q}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial q} = q\frac{d}{dq}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\frac{1}{q}\right)\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}. \qquad (7.10)$$

利用定常势流的 Bernoulli 方程 $q\,dq + dp/\rho = 0$ 及 $dp/d\rho = a^2$, $q/a = M$ (Mach 数)，(7.10)的第二式可改写为

$$\frac{\partial\Phi}{\partial q} = -\frac{\rho_0}{\rho}\frac{1-M^2}{q}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}. \qquad (7.11)$$

将(7.10)的第一式对 q 求导数，第二式对 θ 求导数后消去 Φ，利用(7.11)可以得到关于 Ψ 的微分方程

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\rho_0}{\rho}q\frac{\partial\Psi}{\partial q}\right) + \frac{\rho_0}{\rho}\frac{1-M^2}{q}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2} = 0. \qquad (7.12)$$

再利用(7.5)消去 ρ，可将(7.12)写成

$$q^2\Psi_{qq} + q(1+M^2)\Psi_q + (1-M^2)\Psi_{\theta\theta} = 0. \qquad (7.13)$$

对于 Φ 用几乎同样的做法，可得

$$q^2\Phi_{qq} + \frac{\gamma M^4+1}{1-M^2}q\Phi_q + (1-M^2)\Phi_{\theta\theta} = 0. \qquad (7.14)$$

$M = q/a$ 显然仅是 q 的函数，所以(7.13)，(7.14)是二維势流的速度图方程，每一个都是綫性方程。

§8 Ringleb 的准确解❶

Ringleb 发現，用速度图方程的特解，可以求得在物理平面上有趣味的流动。对 Ψ 的速度图方程(7.12)施行变量分离法，得到最簡单的解

$$\Psi = A\sin\theta\cdot Q(q). \tag{8.1}$$

这里 A 是常数，$Q(q)$ 是下列微分方程的解：

$$\frac{d}{dq}\left(\frac{\rho_0}{\rho}q\frac{dQ}{dq}\right)=\frac{\rho_0}{\rho}\,\frac{1-M^2}{q}Q. \tag{8.2}$$

利用 Bernoulli 方程，有

$$\frac{d}{dq}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\,\frac{1}{q}\right)=-\frac{\rho_0}{\rho}\,\frac{1-M^2}{q^2}❷,$$

所以(8.2)可写为

$$d(q^2Q')/dq=(1-M^2)d(qQ)/dq,$$

这个方程显然有特解 $Q=B/q$ (B 是常数)。于是(7.12)的一个特解是

$$\Psi=K\frac{\sin\theta}{q}\qquad(K=\text{常数}). \tag{8.3}$$

(8.3)就是 Ringleb 的准确解。为簡单起見，取 $K=1$。

不可压縮流动的速度图方程，物理平面和速度平面的对应，都可利用在(7.12)和(7.9)里設 $\rho=\rho_0$，$M=0$ 而得到。这时对应于 Ringleb 解的不可压縮解由 $\Psi_i=\sin\theta/q_i$ 給出，物理平面和速度平面的对应成为

$$x_i=(1/2)(\cos 2\theta/q_i^2),\quad y_i=(1/2)(\sin 2\theta/q_i^2),$$

这里的标数 i 表示不可压縮流动。由这些关系消去 q_i 及 θ，得到

---

❶ F. Ringleb: Z. a. M. M., **20** (1940), 185.

❷ 原书誤为 $-\frac{\rho_0}{\rho}\,\frac{1-M^2}{q}$. ——校者注

$$x_i=\frac{y_i^2}{2\Psi_i^2}-\frac{\Psi_i^2}{2}.$$

Ψ_i=常数的綫表示流綫。而且 $\Psi_i=0$ 的流綫是自原点沿 x 軸到 $+\infty$ 的半射綫，所以这个解就表示所謂旋轉 180° 角的不可压縮流动。

由对应的不可压縮解的类推，我們期望(8.3)也能表示同类的可压縮流动，为此試求物理平面上的流綫。将(7.10)的 Φ_q, Φ_θ 和(8.3)的 Ψ 代入(7.9)，就可以求得 x, y 和 q, θ 間的关系式。略去中間的計算，只記下結果，則有

$$\left.\begin{aligned}z&=\text{const}\left[\frac{\gamma-1}{4}\frac{e^{2i\theta}}{\tau(1-\tau)^{1/(\gamma-1)}}+g(\tau)\right],\\ g(\tau)&=\frac{1}{4}\int\frac{d\tau}{\tau(1-\tau)^{\gamma/(\gamma-1)}},\quad \tau=\frac{\gamma-1}{2}\left(\frac{q}{a_0}\right)^2.\end{aligned}\right\}\quad(8.4)$$

$g(\tau)$ 通常是不完全 Beta 函数，当 $\gamma=1.4$, $\gamma/(\gamma-1)=7/2$ 时，可用下列初等函数表示出来：

$$g(\tau)=-\frac{1}{2}\tanh^{-1}\sqrt{1-\tau}+\frac{1}{10}\frac{1}{(1-\tau)^{5/2}}+\frac{1}{6}\frac{1}{(1-\tau)^{3/2}}+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\tau}}.$$

若取(8.4)第一式的常数为1，比較两边的实部及虚部就得到物理平面和速度平面之間的对应关系

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{\gamma-1}{4}\frac{\cos 2\theta}{\tau(1-\tau)^{1/(\gamma-1)}}+g(\tau),\\ y&=\frac{\gamma-1}{4}\frac{\sin 2\theta}{\tau(1-\tau)^{1/(\gamma-1)}}.\end{aligned}\right\}\quad(8.5)$$

由这两式消去 θ 得

$$[x-g(\tau)]^2+y^2=\left[\frac{\gamma-1}{4}\frac{1}{\tau(1-\tau)^{1/(\gamma-1)}}\right]^2.$$

τ 仅为速度 q 的函数，所以在物理平面上速度为常数的綫是以

$x=g(\tau)$, $y=0$ 为中心，以 $[(\gamma-1)/4][\tau^{-1}(1-\tau)^{-1/(\gamma-1)}]$ 为半徑的圓。

利用(8.5)由(8.4)消去 θ，得到下列关系：

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{(\gamma-1)/4-\Psi^2\tau^2}{\tau(1-\tau)^{1/(\gamma-1)}}+g(\tau),\\ y&=\frac{\sqrt{\gamma-1}}{2}\frac{\sqrt{\tau(1-2\tau/(\gamma-1))}}{\tau(1-\tau)^{1/(\gamma-1)}}\Psi, \end{aligned}\right\} \tag{8.6}$$

在此式里設 Ψ 为常数时，則得物理平面上以 τ 为参数的流綫。

速度 q 由零变化到最大値 c，同时 τ 由零变化到 1，在此期間 $g(\tau)$ 自 $-\infty$ 变化到 $+\infty$。于是，表示 $q=$常数的圓的中心，随 q 增大而在 x 軸上自左向右移动。另一方面，圓的半徑最初先减少，当 $q/a_0=\sqrt{2/\gamma}$ 时达到最小値，然后又逐漸增大。所以在最初相邻的圓互不相交，而到达 $\tau\doteq 1$ 附近时它們就相交了。这个事实意味着在物理平面上的一点同时存在两个速度，而这在物理上是不可能的。物理平面上的实际流綫图如图 8.1 所示。流綫可以分成图中所表示的 (a)，(b)，(c)，(d) 四种。(a) 是最外側的流綫，在无劳远速度由零开始逐漸加速，然后方向改变 180°，通过对称的路綫逐漸减速，到无劳远又变为零。(b)是稍为靠內側的流綫，它和(a)具有同样的性质，不同的只是在 x 軸附近速度超过声速。在这两种流綫上的流动显示出平滑的变化。流綫 (c) 是平滑流綫存在区域的界限，在这种流綫上 q/a_0 的最大値达到 1.57 (換算成 Mach 数 q/a 时大約是 2.5)。比(c)更靠內側的流

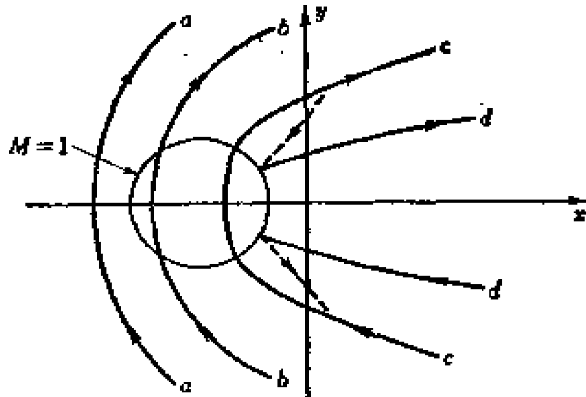


图 8.1 Ringleb 流动

綫(d)上，流动自无穷远逐渐加速而进入超声区域后，在某一点，流綫上必发生尖点，于是流动翻轉到外边去。在流綫上有尖点的事实，意味着在該点产生了无穷大的加速度，从而压力梯度也变成无穷大。这种現象在物理上是不会发生的。这个結果是由无旋的假定导出来的，所以以后如欲得到可能实現的流动时，必須放弃无旋的假定。在这意义下，对流綫翻轉的現象，可以看作是势流的界限，这事常和激波的发生联在一起来論述。

Ringleb 解中可能实現的区域是在流綫(c)的外側，但即使是在这个范圍內还出現超声速部分，最大 Mach 数仍可以达到 2.5 的高値。在实驗可以掌握的范圍內，由亚声速到超声速的加速永远平滑地进行着，但相反由超声速到亚声速的減速却几乎都发生激波，使得在流动中产生間斷。在亚声速流动中出現一部分超声速流动的区域时得到 2.5 那么大的 Mach 数，而且不伴有激波，这样的流动的实例是沒有的。理論和实驗之間这样大的差別，由流动的不稳定和其他种种不同观点曾加以討論，但迄今尙无最終的結論❶。

由 Ringleb 解可知，在发生流綫翻轉現象的点上，沿流綫的速度梯度变成无穷大。若設 ds 为流綫元素时，則 dq/ds 变成无穷大的点在物理平面上的軌迹叫做**极限綫** (limiting line)。在流綫上 $\Psi=$常数，从而 $d\Psi=\Psi_q dq+\Psi_\theta d\theta=0$. 从 (7.9)，(7.10) 消去 Φ 再利用这个关系消去 $d\theta$，則对于物理平面上流綫元素有如下的式子成立：

$$(dz)_\Psi=-\frac{\rho_0}{\rho}\frac{e^{i\theta}}{(\partial\Psi/\partial\theta)}\left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial q}\right)^2+(1-M^2)\left(\frac{1}{q}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)^2\right]dq.$$

而 $dq/ds=(dq/dz)_\Psi$，所以极限綫的条件是

❶ 有关超声速流动連續地轉为亚声速的可能性的討論可見校后記所附的参考文献[12] 112～119頁。那里指出，近年来在有些实驗中已发现这样的气流。——校者注

$$(M^2-1)\left(\frac{1}{q}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)^2=\left(\frac{\partial\Psi}{\partial q}\right)^2, \tag{8.7}$$

于是极限綫只能在超声速区域$(M>1)$里出現。

其次，在流綫上有

$$\partial\Psi/\partial\theta=-(\partial\Psi/\partial q)\cdot(dq/d\theta)_\Psi,$$

代入(8.7)，得

$$\left(\frac{dq}{d\theta}\right)_\Psi=\pm\frac{q}{\sqrt{M^2-1}}. \tag{8.8}$$

将(8.8)左边的标数Ψ去掉后所得的式子，表示速度图平面上的特征綫。所以在速度图平面上的流綫和特征綫相切时，物理平面上的对应点必在极限綫上，可以断言在該处发生了流綫翻轉的現象。

最后，我們来考虑把流函数和势函数由物理平面变换到速度平面时所用的函数行列式J，

$$J=\frac{\partial(\Phi,\Psi)}{\partial(q,\theta)}=\begin{vmatrix}\Phi_q & \Phi_\theta\\ \Psi_q & \Psi_\theta\end{vmatrix},$$

右边以(7.10)，(7.11)代入，得

$$J=-\frac{\rho_0}{\rho}q\left[(1-M^2)\left(\frac{1}{q}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial q}\right)^2\right],$$

将极限綫条件(8.7)代入此式，右边为零。即极限綫条件也可以用$J=0$表示。

§9 速度图方程的一般解

前节所述的 Ringleb 解是速度图方程的特解。对应于不可压縮流动的解法，在这里我們来考虑满足速度图平面上任意边界条件的可压縮流动的一般求解法。首先从基本方程(7.13)出发。

$$q^2\Psi_{qq}+q(1+M^2)\Psi_q+(1-M^2)\Psi_{\theta\theta}=0. \tag{9.1}$$

在上式中令$M=0$可得到不可压縮流动的基本方程，其解Ψ_i为

$$\Psi_{in}=q^n\begin{cases}\cos n\theta\\ \sin n\theta\end{cases}\quad -\infty<n<+\infty. \tag{9.2}$$

如 Ringleb 解所指出，(9.1)的解由

$$\Psi_n=F_n(q)\begin{cases}\cos n\theta\\ \sin n\theta\end{cases}$$

給出。于是当 $M\to 0$ 时，必有 $F_n(q)\to q^n$. 为了方便將 Ψ 写成如下的形式：

$$\Psi_n=q^n f_n(q)\begin{cases}\cos n\theta\\ \sin n\theta,\end{cases} \tag{9.3}$$

当 $M\to 0$ 时，f_n 趋近于1，所以可以把 f_n 看作是压缩性的修正系数。把(9.3)代入(9.1)，便得到 f_n 所必須滿足的微分方程

$$q^2f_n''+(2n+1+M^2)qf_n'+n(n+1)M^2f_n^2=0,$$

导入在前节中曾用过的相同的量

$$\tau=(q/c)^2=[(\gamma-1)/2](q/a_0)^2,$$

則上列微分方程可写为

$$\tau(1-\tau)\frac{d^2f_n}{d\tau^2}+\left[(n+1)-\left(n+1-\frac{1}{\gamma-1}\tau\right)\right]\frac{df_n}{d\tau}+\frac{n(n+1)}{2(\gamma-1)}f_n=0. \tag{9.4}$$

(9.4)是一个超几何微分方程，其解用超几何級数 F 給出

$$\left.\begin{aligned} f_n=F_n(a_n;\,b_n;\,c_n;\,\tau)&=1+\frac{a_nb_n}{c_n1!}\tau+\frac{a_n(a_n+1)b_n(b_n+1)}{c_n(c_n+1)2!}\tau^2+\cdots,\\ c_n=n+1,\quad a_n+b_n&=n-1/(\gamma-1),\\ a_nb_n&=-n(n+1)/\{2(\gamma-1)\}. \end{aligned}\right\} \tag{9.5}$$

于是(9.1)的一般解可表示为

$$\Psi=\sum_{n=0}^{\infty}q^nF_n(a_n;\,b_n;\,c_n;\,\tau)\{A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta\}, \tag{9.6}$$

这里 A_n, B_n 是必須由边界条件决定的常数。以上是利用速度图法的一般解法原理，但在实际問題中求解是非常复杂的，而且为了解决关于解析开拓的困难，还需要特别的技巧。解法的詳細叙述見参考文献❶，本书不再作进一步地叙述。

§10 亚声速速度图法(Kármán-錢学森法)❷

Kármán 和錢学森一起找到了利用速度图法求亚声速流动的近似解法。本节就叙述这个方法。

关于 Φ 及 Ψ 的速度图方程已由(7.10), (7.11)給出，重写如下:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q} = -\frac{\rho_0}{\rho}\frac{1-M^2}{q}\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \frac{\rho_0}{\rho} q \frac{\partial \Psi}{\partial q}. \tag{10.1}$$

和(10.1)相对应的不可压縮流动的速度图方程，是設 $M=0$, $\rho=\rho_0$ 而得到。若附以标数 i 来表示不可压縮流动的各个量时，有

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial q_i} = -\frac{1}{q_i}\frac{\partial \Psi_i}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial \Phi_i}{\partial \theta} = q_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial q_i}. \tag{10.2}$$

为了使(10.2)变成对称的形式，作下列变换:

$$\omega_i = \log q_i, \quad d\omega_i = \frac{dq_i}{q_i}, \quad q_i \frac{\partial}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial \omega_i}. \tag{10.3}$$

根据(10.3)，可将(10.2)变成

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial \omega_i} = -\frac{\partial \Psi_i}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial \Phi_i}{\partial \theta} = \frac{\partial \Psi_i}{\partial \omega_i}, \tag{10.4}$$

于是 ω_i, θ 平面上的速度图方程变为 Cauchy-Riemann 方程，$\Phi_i(\omega_i, \theta)$ 和 $\Psi_i(\omega_i, \theta)$ 都滿足 Laplace 方程。复速度可写为

$$u_i + i v_i = q_i e^{-i\theta} = e^{\log q_i - i\theta} = e^{\omega_i - i\theta}.$$

---

❶ Cherry: Proc. Roy. Soc. (A), 192 (1947), 45.

❷ H. S. Tsien (錢学森): J. Ae. Sci. 6 (1939), 399. Kármán: J. Ae. Sci., 8 (1941), 337.

Busemann❶ 发現，导入类似的变量也可以簡化可压縮流动的方程(10.1)。这时令

$$d\omega = \sqrt{1-M^2}\,dq/q, \quad q(\partial/\partial q) = \sqrt{1-M^2}\,(\partial/\partial\omega). \quad (10.5)$$

利用这个变换，(10.1)可变为

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\omega} = -\frac{\rho_0}{\rho}\sqrt{1-M^2}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = \frac{\rho_0}{\rho}\sqrt{1-M^2}\frac{\partial\Psi}{\partial\omega}. \quad (10.6)$$

我們来考虑这二式右边的系数。根据 Bernoulli 方程用 Mach 数 M 来表示 ρ/ρ_0，

$$(\rho_0/\rho)\sqrt{1-M^2} = [1+(\gamma-1)M^2/2]^{1/(\gamma-1)}(1-M^2)^{1/2},$$

設 $M<1$，将右边展成 M^2 的級数，得到

$$\frac{\rho_0}{\rho}\sqrt{1-M^2} = 1-\frac{\gamma+1}{8}M^4+O(M^6). \quad (10.7)$$

于是取 $(\rho_0/\rho)\sqrt{1-M^2}=1$ 时所产生的誤差，可以看作是和 M^4 同阶。这个事实最初是由 Чаплыгин❷ 发現的。作了这样的近似，就可将(10.6)归結到 Cauchy-Riemann 方程。

在(10.6)里設 $(\rho_0/\rho)\sqrt{1-M^2}=1$ 这件事，可以看作是对于实际流动所作的一个近似，但又可解释为满足这样的关系的一种假想气体流动的精确处理。現在我們来考察一下这样的假想气体具有哪些特性。对于任何气体都有如下关系成立：

$$M^2 = q^2/a^2 = q^2/(dp/d\rho).$$

所以可自 $(\rho_0/\rho)\sqrt{1-M^2}=1$ 导出下列关系：

$$[1-(\rho/\rho_0)^2](dp/d\rho) = q^2,$$

两边对 ρ 求导数，得

$$[1-(\rho/\rho_0)^2](d^2p/d\rho^2) - 2(\rho/\rho_0^2)(dp/d\rho) = 2q(dq/d\rho).$$

由此式和 Bernoulli 方程 $q\,dq+dp/\rho=0$ 消去 q 得下列关系：

---

❶ Busemann: Z. a. M. M., 17 (1937), 73.

❷ Chaplygin (Чаплыгин): Wiss. Ann. Univ. Moscow Trans., NACA TM 1063 (1904).

$$[1-(\rho/\rho_0)^2][(d^2p/d\rho^2)+(2/\rho)(dp/d\rho)]=0,$$

因为 $\rho\neq\rho_0$，所以

$$\frac{d^2p}{d\rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{dp}{d\rho}=0, \tag{10.8}$$

将上式积分，得到 p 和 ρ 間的关系式

$$p=A-B/\rho, \tag{10.9}$$

A, B 是积分常数。(10.9)是决定假想气体状态变化的关系式，是和真实气体的等熵变化 $p=k\rho^\gamma$ (k 是常数)相对应的式子。虽然常数 A, B 可以任意选取，但为了使假想气体流动更接近于真实气体流动，我們选取这样的常数，使得在 $p\sim(1/\rho)$ 平面的特征点上，(10.9)的曲綫和真实气体的等熵曲綫直到梯度都是一致的。取駐点 $(q=0)$ 和代表无穷远均匀流动状态的点作为这个特征点，这两种选法是时常使用的。对于这两种情形，(10.9)分别可以写为

$$\left.\begin{aligned} p-p_0&=\rho_0^2a_0^2\left(\frac{1}{\rho_0}-\frac{1}{\rho}\right)(\text{Чаплыгин, Busemann}),\\ p-p_\infty&=\rho_\infty^2a_\infty^2\left(\frac{1}{\rho_\infty}-\frac{1}{\rho}\right)(\text{Kármán-錢学森}).\end{aligned}\right\} \tag{10.10}$$

均匀流动繞流薄物体时，速度近于零的部分范圍很狹小，对于流动的全体沒有多少影响，所以很容易看出第二式可以得出比較好的近似。图10.1中表示出了在$(p, 1/\rho)$平面上真实气体的等熵曲綫和假想气体的$\left(p, \frac{1}{\rho}\right)$曲綫。

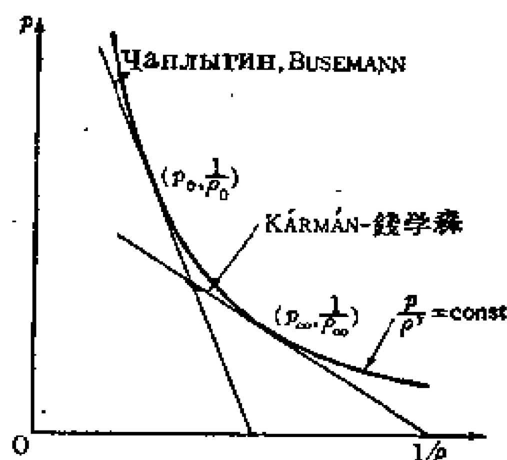


图10.1 真实气体和假想气体的压力密度曲綫

在状态变化由(10.9)給出的假想气体的情形，若定义

$$a^2=(dp/d\rho),$$
$$a_0^2=(dp/d\rho)_{q=0},$$

则得关系式

$$\rho^2 a^2 = \rho_0^2 a_0^2 = B\ (\text{常数}). \qquad (10.11)$$

又若积分 Bernoulli 方程 $q\,dq + dp/\rho = 0$，则在 q 与 ρ 間有如下的关系式成立：

$$\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 = 1 + \frac{q^2}{a_0^2}. \qquad (10.12)$$

由此两式可知，在这个假想气体的流动中，当 q 增大时则 ρ 减小，而 a 增加。前者和真实气体相同，而后者却完全相反。

其次，气体的压力不能是負的，所以假想气体的最小密度 $\rho_{\min}$ 由 $\left(p, \frac{1}{\rho}\right)$ 曲綫和 $\frac{1}{\rho}$ 軸的交点来决定。若自 (10.10) 求 $\rho_{\min}$，就得到

$$\rho_\infty/\rho_{\min} = (\gamma+1)/\gamma, \qquad (10.13)$$

与此对应的 q 的最大值 $q_{\max}$，經过一些計算之后即得

$$\frac{q_{\max}}{q_\infty} = \frac{\sqrt{(\gamma+1)^2/\gamma^2 - (1-M_\infty^2)}}{M_\infty}. \qquad (10.14)$$

图 10.2 表示了这个关系 (取 $\gamma = 1.4$)。图中加上阴影的部分表示没有物理意义的范圍。又由假想气体最初的关系式

$$(\rho_0/\rho)\sqrt{1-M^2} = 1$$

显然可知，局部 Mach 数 M 在流动中的任意一点上都必須小于1。

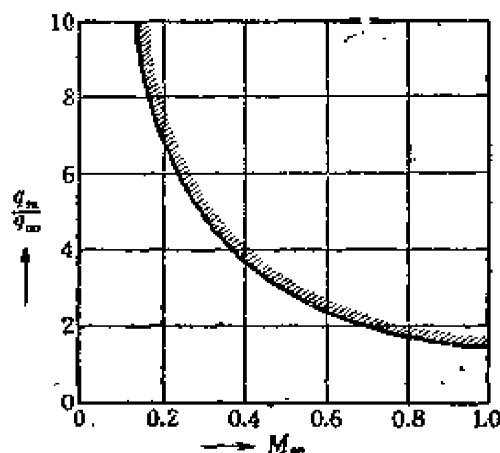


图 10.2　假想气体的速度范圍

支配具有以上特性的假想气体流动的基本方程 (10.6) 变成 Cauchy-Riemann 方程，所以 Φ 及 Ψ 都滿足 ω, θ 平面上的 Laplace 方程。另一方面，不可压縮流动中的 Φ_i 和 Ψ_i 滿足 ω_i, θ 平面上的同样的 Laplace 方程。于是

若假定在 ω_i, θ 平面上已經得到满足边界条件 $\overline{\omega}_i=\overline{\omega}_i(\theta)$ 的不可压縮解 $\Psi_i(\omega_i, \theta)$，則令 $\Psi(\omega, \theta)=\Psi_i(\omega, \theta)$ 就給出了满足边界条件 $\overline{\omega}=\overline{\omega}(\theta)=\overline{\omega}_i(\theta)$ 的可压縮流动的解。这样，由一个不可压縮解虽可求得与此对应的一串可压縮解，但对于它們的物理平面上的边界条件 $\overline{z}_i$ 和 $\overline{z}$ 却未必一致。Kármán–錢学森的方法，就給出了可压縮流动和不可压縮流动的边界上对应点的速度 q 和 q_i 間的近似关系，同时又决定了 $\overline{z}$ 和 $\overline{z}_i$ 間的关系。

首先求 q 和 q_i 間的关系。在此方法里是用 ω 代替 ω_i 自不可压縮解导出可压縮解，所以可設 $\omega=\omega_i$. 于是由(10.3)和(10.5)得到

$$dq_i/q_i=\sqrt{1-M^2}\,dq/q.$$

再利用 $(\rho_0/\rho)\sqrt{1-M^2}=1$ 及(10.12)积分上式，就可求得 q_i 和 q 間的关系为

$$q_i=K\frac{q}{a_0+\sqrt{a_0^2+q^2}}.$$

这里 K 是积分常数，其值由条件 $a_0\to\infty$ 时 $q\to q_i$ 所决定，可得 $K=2a_0$. 于是得

$$q=4a_0^2q_i/(4a_0^2-q_i^2). \tag{10.15}$$

設在无穷远均匀流动的速度为 U, U_i，則因为 U 和 U_i 之間也有关系(10.15)成立，所以得到

$$\frac{q}{U}=\frac{q_i}{U_i}\frac{1-\lambda}{1-\lambda(q_i/U_i)^2}, \quad \lambda=\frac{U_i^2}{4a_0^2}. \tag{10.16}$$

可以用下面的方法，以均匀流动的 Mach 数 M_∞ 来表示 λ. 由(10.15)

$$U_i=2U/[1+\sqrt{1+(U/a_0)^2}],$$

于是

$$\lambda=\left(\frac{U}{a_0}\right)^2\Big/\left[1+\sqrt{1+\left(\frac{U}{a_0}\right)^2}\right]^2.$$

另一方面，由假想气体的关系式

$$\left(\frac{U}{a_0}\right)^2=\left(\frac{U}{a_\infty}\right)^2\left(\frac{a_\infty}{a_0}\right)^2=\frac{M_\infty^2}{1-M_\infty^2},$$

所以最后得到

$$\lambda=\frac{M_\infty^2}{[1+\sqrt{1-M_\infty^2}]^2}. \tag{10.17}$$

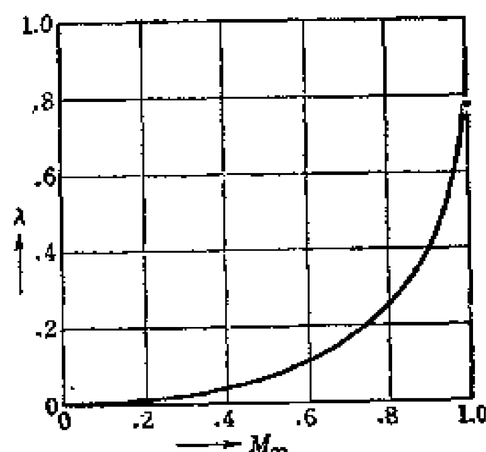


图 10.3 $\lambda\sim M_\infty$ 曲綫

图 10.3 表示出这个关系。根据(10.16)及(10.17)可以給出不可压縮流动和可压縮流动在对应点的速度間的关系。

其次，求压力系数間的对应关系。設压力系数为 C_p，則

$$C_p=\frac{p-p_\infty}{(1/2)\rho_\infty U^2},$$

利用假想气体关系式，得

$$C_p=\frac{2}{M_\infty^2}\left(1-\frac{\rho_\infty}{\rho}\right)=\frac{2}{M_\infty^2}\left(1-\frac{\rho_\infty}{\rho_0}\frac{\rho_0}{\rho}\right),$$

$$\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2=1+\frac{q^2}{a_0^2}=1+\left[\frac{4a_0q_i}{4a_0^2-q_i^2}\right]^2=\left[\frac{1+\lambda(q_i/U_i)^2}{1-\lambda(q_i/U_i)^2}\right]^2.$$

另一方面，有

$$C_{pi}=\frac{p_i-p_{\infty i}}{\frac{1}{2}\rho_i U_i^2}=1-\left(\frac{q_i}{U_i}\right)^2,$$

于是

$$\frac{\rho_0}{\rho}=\frac{1+\lambda-\lambda C_{pi}}{1-\lambda+\lambda C_{pi}},$$

結果 C_p 和 C_{pi} 間的关系为

$$C_p=\frac{2}{M_\infty^2}\,\frac{(1-\lambda)-(1+\lambda)\sqrt{1-M_\infty^2}+\lambda(1+\sqrt{1-M_\infty^2})C_{pi}}{(1-\lambda)+\lambda C_{pi}}.$$

将(10.17)代入消去 λ，則有

$$C_p=\frac{C_{pi}}{\sqrt{1-M_\infty^2}+[M_\infty^2/(1+\sqrt{1-M_\infty^2})](C_{pi}/2)}, \tag{10.18}$$

当 C_{pi} 小时，(10.18)和 §12 的 Prandtl-Glauert 关系式一致。

其次的問題是物理平面上的边界的变形。首先从联系 dx, dy 和 $d\Phi$, $d\Psi$ 間的关系式 (7.8) 出發。使用复数表示可將这个关系写为

$$dz = \frac{e^{i\theta}}{q}\left(d\Phi + \frac{\rho_0}{\rho}\, i d\Psi\right).$$

利用前已求得的假想气体关系式，将 q 和 ρ_0/ρ 都用 q_i 表示，则得

$$\begin{aligned} dz &= \frac{e^{i\theta}}{q_i}\left(1 - \frac{q_i^2}{4a_0^2}\right)\left[d\Phi + \frac{1 + (q_i^2/4a_0^2)}{1 - (q_i^2/4a_0^2)}\, i d\Psi\right] \\ &= \frac{q_i e^{i\theta}}{q_i^2}\left[(d\Phi + i d\Psi) - \frac{q_i^2}{4a_0^2}(d\Phi - i d\Psi)\right]. \end{aligned}$$

今导入由 $w = u + iv$ 及 $F = \Phi + i\Psi$ 所定义的复函数 w 及 F，用加横划的字母表示共軛函数时，则得

$$dz = \frac{w_i}{w_i \bar{w}_i}\left(dF - \frac{w_i \bar{w}_i}{4a_0^2}\, d\bar{F}\right) = \frac{dF}{\bar{w}_i} - \frac{w_i^2}{4a_0^2}\,\frac{d\bar{F}}{w_i}.$$

在 Kármán-錢学森的方法里，$F = F_i = \Phi_i + i\Psi_i$，所以

$$\bar{w}_i = dF/dz_i, \quad w_i = d\bar{F}/d\bar{z}_i,$$

于是

$$dz = dz_i - \frac{w_i^2}{4a_0^2}\, d\bar{z}_i = dz_i - \frac{U_i^2}{4a_0^2}\left(\frac{1}{U_i}\,\frac{d\bar{F}}{d\bar{z}_i}\right)^2 d\bar{z}_i.$$

把由(10.16)和(10.17)定义的 λ 代入上式时，得到

$$\left.\begin{aligned} z &= z_i - \lambda \int \left(\frac{d\bar{G}}{d\bar{z}_i}\right)^2 d\bar{z}_i, \\ G(z_i) &= (1/U_i) F(z_i), \quad F(z_i) = F_i(z_i). \end{aligned}\right\} \qquad (10.19)$$

此式表示不可压縮流动和与此对应的可压縮流动在物理平面上对应坐标間的关系。第一式右边的第二项給出边界的修正量，其大小和 λ 成正比。由图 10.3 可以看出，当 M_∞ 不十分接近于 1 时 λ 是十分小的，所以在 Kármán-錢学森的理論里，作为第一級近似

略去这个修正项而令 $z=z_i$. 就是說，将 (10.18) 給出的 C_p 和 C_{pi} 的对应关系看作是在同一物体的同一点成立的。根据和实驗的比較，Kármán–錢学森的近似理論和实驗頗一致。按照多数計算实例，在这个解法中由設 $(\rho_0/\rho)\sqrt{1-M^2}\doteq 1$ 而产生的誤差，和由于忽視边界变形而产生的誤差可以互相抵消，所以压力系数具有較預期还高的准确度。

第4章　小扰动法的綫性理論

§11　微分方程和边界条件

可压縮流体力学的基本方程(3.7)是复杂的非綫性方程，要准确地解这个方程几乎是不可能的。所以着重考虑在实际問題中的应用时，用一种方法把它近似地化成簡单易解的形式是很有必要的。这些近似法里应用最广的就是本章中要叙述的小扰动法的綫性理論。

当流体中所产生的扰动很小时，可以把方程綫性化，这在§2里曾就声波的情形指出来过。这里将处理把物体放在均匀平行流动里的定常的情形，且将物体所产生的扰动看作是很小的。設均匀流动平行于 x 軸，其速度为 U，則势函数可設为

$$\Phi=Ux+\varphi(x,\ y,\ z),\tag{11.1}$$

这里 φ 是扰动势，由最初的假定，必有

$$\varphi\ll Ux,\quad \varphi_x,\ \varphi_y,\ \varphi_z\ll U.\tag{11.2}$$

将(11.1)代入基本方程(3.7)里，略去 φ 的二阶以上的項，则得下列綫性方程：

$$\left.\begin{aligned}(1-M^2)\varphi_{xx}+\varphi_{yy}+\varphi_{zz}=0\\ M=\frac{U}{a_\infty},\end{aligned}\right\}\tag{11.3}$$

这里 a_∞ 是均匀流动中的声速。

(11.3)是綫性理論的基本方程。它按照 $M<1$ (亚声速) 及 $M>1$ (超声速) 而分别为椭圓型及双曲型的方程。且明确地表示出高速气流所具有的特性。但是，因为 M 是均匀流动的 Mach 数，

所以当 M 非常接近于1时，可以想象得到，由均匀流动和扰动流动所合成的流动的 Mach 数会局部地大于1，局部地小于1. 这样的流动叫做跨声速流动(transonic flow)。它是在(11.3)的适用范圍以外的(参照 § 27)。

其次考虑边界条件。当物体是处在无限的气流中时，无穷远的扰动不可能是发散的，所以

在无穷远：
$$\varphi \neq \infty. \tag{11.4}$$
若物体表面以
$$F(x, y, z)=0 \text{ 或 } z=g(x, y) \tag{11.5}$$
表示时，因为流体必須沿着物体表面流动，所以作为物体表面的边界条件是

在 $F(x, y, z)=0$ 上：
$$(U+\varphi_x)F_x+\varphi_y F_y+\varphi_z F_z=0, \tag{11.6}$$
(11.6)完全是一般的边界条件。

在可以应用綫性理論的物体上，物体表面对于来流方向(x 方向)的傾斜必須非常小。即
$$|F_x| \ll \sqrt{F_y^2+F_z^2}. \tag{11.7}$$
此外又有 $\varphi_x \ll U$，所以(11.6)可以作如下的修正：

在 $F(x, y, z)=0$ 上：
$$UF_x+\varphi_y F_y+\varphi_z F_z=0, \tag{11.8}$$
以作为方程(11.3)在物体表面的边界条件。

在特殊情形下，(11.8) 还可以簡化。首先我們来考慮在条件(11.7)以外再加上条件：物体表面上处处都有 F_y, F_z 中的一个比另一个小得多，例如 $F_y \ll F_z$ 的情形。在这样的物体上❶，物体表面的法綫几乎和 z 軸平行。因此，若适当地选取原点，可以使物体表面上处处都有 $|z| \ll \sqrt{x^2+y^2}$，这样的物体接近于向 x, y 方向延展的平面。处理这样的物体周圍的流动問題叫做平面型問題。在平面型問題里，φ_z 在 $z=0$ 附近可以展成冪級数

❶ 这样的物体或称为薄物体。——校者注

$$\varphi_z(x, y, z) = \varphi_z(x, y, 0) + \varphi_{zz}(x, y, 0)z + O(z^2),$$

因为物体表面的 z 坐标是非常小的，所以不妨令

$$\varphi_z(x, y, g(x, y)) = \varphi_z(x, y, 0).$$

就是說，可以把物体表面上的边界条件看作是在物体表面在 xy 平面上的投影上成立。考虑到 $F_y \ll F_z$，边界条件(11.8)对于平面型問題可以改写为

$$\left.\begin{array}{ll} \text{当 } z=0 \text{ 有} & UF_x + \varphi_z F_z = 0, \\ \text{或} & \\ \text{当 } z=0 \text{ 有} & \varphi_z = U\left(\dfrac{\partial g}{\partial x}\right), \end{array}\right\} \qquad (11.9)$$

这个条件对物体在 xy 平面的投影部分上成立。(11.9)就是平面型問題的边界条件。

在平面型問題以外的情形不能应用(11.9)，(11.8)必須在边界上严格地滿足。其理由是：φ_z 当 $z=0$ 时有奇性，所以不能象平面型問題那样在 $z=0$ 附近展成冪級数。例如考虑軸平行于流动方向的軸对称物体的情形，若令 $r=R(x)$ 是物体表面方程(r 是半徑方向的长度)，则 $\dfrac{dR}{dx}=\dfrac{\varphi_r}{U}$ 就是准确的边界条件。为了簡单起見，考虑不可压縮流动的情形。在軸上放置适当强度的源点就可以使这个边界条件得到滿足，但由源点引起的扰动速度和半徑 r 成反比，所以 φ_r 在軸上($r=0$)变为无穷大。于是不論物体半徑 R 多小，也不能使物体表面上的 φ_r 和軸上的 φ_r 相等。由于这个理由，在一般三維問題里要求边界条件(11.8)成立。

其次，考虑綫性理論中压力系数 C_p 的表示式。設某点的压力为 p，来流的压力及密度各为 p_∞，ρ_∞，則 C_p 可定义为

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\left(\frac{1}{2}\right)\rho_\infty U^2} = \frac{p - p_\infty}{p_\infty} \cdot \frac{2}{\gamma} \cdot \frac{1}{M^2}.$$

利用等熵流动的 Bernoulli 方程，可将 $\dfrac{p}{p_\infty}$ 速度用 q 表示为

$$\frac{p-p_\infty}{p_\infty}=\left[1+\frac{\gamma-1}{2a_\infty^2}(U^2-q^2)\right]^{\gamma/(\gamma-1)}-1.$$

設 x, y, z 軸方向的扰动速度分量各为 u, v, w, 則

$$q^2=(U+u)^2+v^2+w^2.$$

由小扰动的假設,有 u, v, $w\ll U$, 所以在綫性理論里可略去它們二阶以上的量。再由上列公式計算 C_p, 可得

$$C_p=-\frac{2u}{U}=-2\frac{1}{U}\frac{\partial\varphi}{\partial x}. \tag{11.10}$$

§12 Prandtl-Glauert 法則

当均匀来流的 Mach 数小于1时,在(11.3)里可以假設

$$1-M^2=\beta^2>0. \tag{12.1}$$

現在考慮下列变換:

$$\xi=x,\quad \eta=\beta y,\quad \zeta=\beta z,\quad \varphi_i=k\varphi, \tag{12.2}$$

这里 k 是任意常数。將这个变換施用于微分方程(11.3),得到

$$\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial\zeta^2}=0. \tag{12.3}$$

(12.3)是势方程,所以可將 ξ, η, ζ 空間里的 φ_i 看作是表示不可压縮流动的势函数。如將同一变換施于边界条件,由(11.9)得到

当 $\zeta=0$ 时

$$UG_\xi+\frac{\beta^2}{k}\frac{\partial\varphi_i}{\partial\zeta}G_\zeta=0, \tag{12.4}$$

又由(11.8)得到

当 $G(\xi,\eta,\zeta)=0$ 时

$$UG_\xi+\frac{\beta^2}{k}\frac{\partial\varphi_i}{\partial\eta}G_\eta+\frac{\beta^2}{k}\frac{\partial\varphi_i}{\partial\zeta}G_\zeta=0, \tag{12.5}$$

其中 $G(\xi,\eta,\zeta)=F\left(\xi,\frac{\eta}{\beta},\frac{\zeta}{\beta}\right)$.

(12.4)表示一个平面型問題的边界条件,物体表面所应該有

的 x 方向的梯度是

$$\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}=\frac{1}{U}\frac{\partial\varphi_i}{\partial\zeta}=-\frac{k}{\beta^2}\frac{G_\xi}{G_\zeta}=-\frac{k}{\beta}\frac{F_x}{F_z}.$$

在变换前物体表面的 x 方向梯度是 $-\frac{F_x}{F_z}$，所以在 ξ, η, ζ 空間的物体表面的梯度等于与此 ξ, η, ζ 空間对应的 x, y, z 空間內对应点的梯度的 $\frac{k}{\beta}$ 倍。

由(11.10)可知压力系数和 x 方向的扰动速度成正比，所以若令对应的两种流动中的对应点的压力系数各为 C_p 及 C_{pi}，有

$$C_{pi}=kC_p, \tag{12.6}$$

升力系数間也服从同一关系。

在此情形(平面型問題)中常数 k 的值完全是任意的。实际上最常使用以下两种情形：

(1) $k=\beta$ 的情形：此时物体表面的 x 方向梯度，因而物体的截面，对于两种流动都相等。这就是說："若有放置在 xy 平面上的平面型物体，处在 Mach 数为 M 的亚声速流动中，則物体表面的压力系数是在对应点具有同一截面的物体，处在不可压縮流动中时对应点压力系数的 $\frac{1}{\sqrt{1-M^2}}$ 倍"。

(2) $k=1$ 的情形：此时对应点的势函数相等，而物体截面的厚度比和攻角改变了。这就是說："若有放置在 xy 平面上的平面物体，处在 Mach 数为 M 的亚声速流动中，則物体表面的压力系数和另一物体的对应点的压力系数相等，这物体和原物体相比，在 y 方向长度縮小 $\sqrt{1-M^2}$ 倍，且对应点的截面厚度比和攻角都增大 $\frac{1}{\sqrt{1-M^2}}$ 倍，且处在不可压縮流动中"。

看起来(1)和(2)好象表示不同的內容，因为在不可压縮流动的綫性理論里，压力系数恒与厚度比及攻角成正比，所以两者表現

形式是不同的，但实际上却表示着同一个事实。在平面型問題里的上述法則叫做 Prandtl-Glauert 法則。

其次，考慮一般的边界条件(12.5)。在此式里若設 $k=\beta^2$，則边界条件变为

当 $G(\xi, \eta, \zeta)=0$ 时有

$$UG_\xi+\frac{\partial\varphi_i}{\partial\eta}G_\eta+\frac{\partial\varphi_i}{\partial\zeta}G_\zeta=0. \qquad (12.7)$$

这个式子很清楚地表示，在 ξ, η, ζ 空間里以 $G(\xi, \eta, \zeta)=0$ 表示的物体周圍的流动的綫性边界条件。于是此时的可压縮流动和不可压縮流动之間的对应关系可表述如下："某物体周圍的 Mach 数为 $M(<1)$ 的流动，和只把該物体与来流正交方向的長度縮小 $\sqrt{1-M^2}$ 倍而得的物体周圍的不可压縮流动之間，有对应关系，而且可压縮流动的压力系数等于不可压縮流动在对应点的值的 $\frac{1}{1-M^2}$ 倍"。

这个法則叫做推广的 Prandtl-Glauert 法則。它和先前的平面型問題里設 $k=\beta^2$ 而得的法則完全相同。在平面型問題里常数 k 可以任意选取，而在非平面型問題里只限于 $k=\beta^2$，其理由是：在前者可将物体表面的边界条件看作是在 $z=0$ 的条件，但在后者却不允許这样的近似，而要求物体表面上的边界条件必須严格地滿足❶。

❶ Goethert: Lilienthal Gesel. 127, Trans., NACA TM 1105.

第5章　超声速源点及其应用

§13　超声速源点 (supersonic source)

在来流 Mach 数为 $M(>1)$ 的超声速流动中，扰动势 φ 所满足的綫性微分方程由(11.3)可写为

$$m^2\varphi_{xx}-\varphi_{yy}-\varphi_{zz}=0,\quad m=\sqrt{M^2-1} \tag{13.1}$$

又可写作

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial(imy)^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial(imz)^2}=0, \tag{13.2}$$

形式上变成对于$(x,\ imy,\ imz)$的不可压縮的势方程。以 $x,\ y,\ z$ 为变量的不可压縮势方程的一个特解由

$$\varphi=-\frac{1}{R},\quad R=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{13.3}$$

表出，其奇点(此处是原点)叫做源点(source)。现在对于(13.3)作 $x\to x,\ y\to imy,\ z\to imz$ 变换，则得方程(13.2)也即是(13.1)的特解。这叫做超声速源点。它的扰动势可以写成下列形式:

$$\varphi=-\frac{1}{R_h},\quad R_h=\sqrt{x^2-m^2(y^2+z^2)} \tag{13.4}$$

R_h 和 R 不同，它不表示空間里实际的距离。但由不可压縮情形作类比，可将它叫做双曲距离 (hyperbolic distance)。R_h 仅在 $x^2\geqslant m^2(y^2+z^2)$ 的范圍里是实数，此外都是虚数而(13.4)就失去了物理意义。$x^2=m^2(y^2+z^2)$ 表示以原点(扰动源)为頂点，以 x 軸(来流方向)为軸的圓錐面，其頂角 μ 等于 Mach 角 $\sin^{-1}\left(\frac{1}{M}\right)$。这个圓錐分成自原点向上游延展的和向下游延展的两部分，在它們的內部 R_h 是实数。前者叫做倒 Mach 錐，后者叫做 Mach 錐。

今有一个扰动源点在x軸上向負的方向以速度U作等速直綫运动，設想在某一时刻t恰好到达原点。若設周圍的气体是靜止的，則在某一瞬时由扰动源点所发出的扰动，形成以該点为中心的球面波向周圍扩展，当扰动小时其傳播速度等于靜止气体的声速a。图13.1表示出在$t=t$, $t=t-\Delta t$, $t=t-2\Delta t$, … 时由上述扰动

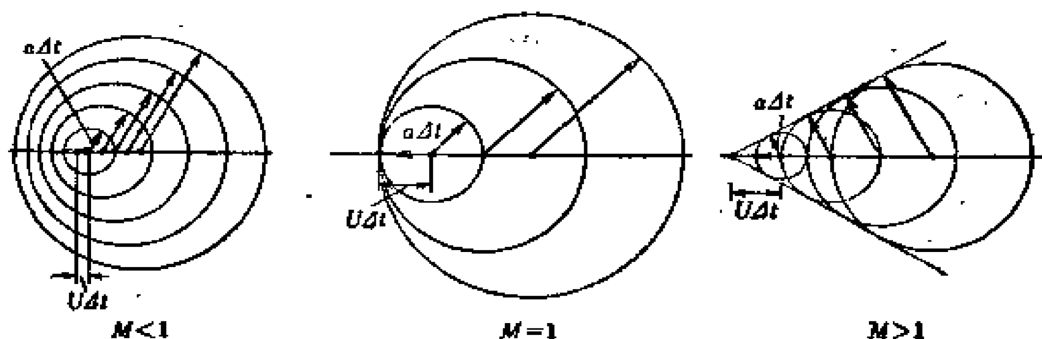


图13.1 小扰动波的傳播

源所发出的扰动波面在$t=t$时的状态。可以看出，当$U>a$时，这些波面具有一个包絡面。这个包絡面是頂角为$\mu=\sin^{-1}\left(\frac{1}{M}\right)$的圓錐，扰动所及的范圍只限于圓錐內部。今若取固定在扰动源点的坐标系时，这个圓錐就和上述 Mach 錐一致。于是在倒 Mach 錐內部R_h錐也是实数，但考虑实际流动的情形时，受某一扰动源点的影响的范圍却仅限于以此为頂点的 Mach 錐的內部。而另一方面，在决定某点的流动状态时，只須考虑以該点为頂点的倒 Mach 錐內部的扰动源点的影响就够了。

我們来求由(13.4)所表示的放在原点的单位超声速源点所誘导出来的扰动速度。設x, y, z方向的扰动速度为u, v, w，且設$\sqrt{y^2+z^2}=r$，則在$(r/x)\leqslant(1/m)$时(Mach 錐內部)，有

$$
\left.\begin{aligned}
\varphi&=\frac{-1}{\sqrt{x^2-(mr)^2}}, & u&=\frac{x}{[x^2-(mr)^2]^{3/2}},\\
v&=\frac{-m^2y}{[x^2-(mr)^2]^{3/2}}, & w&=\frac{-m^2z}{[x^2-(mr)^2]^{3/2}},
\end{aligned}\right\} \tag{13.5}
$$

在 Mach 錐外部有 $u=v=w=0$。

(13.5)所給出的扰动速度在 Mach 錐 $(r/x=1/m)$ 上变成无穷大，流綫方向和圓錐正交。其流綫的形状如图 13.2 所示。对于

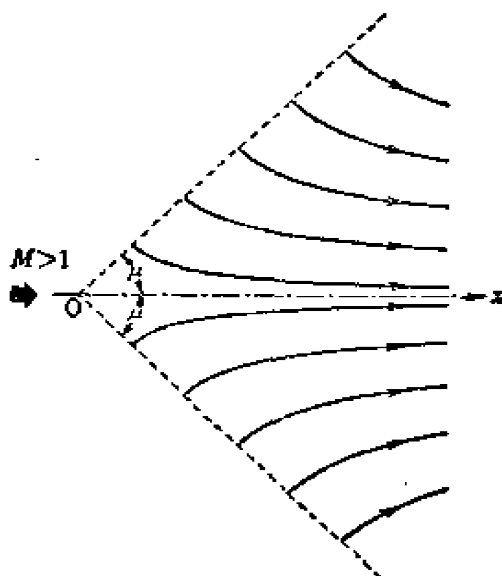


图 13.2 超声速源点的流綫图

不可压縮源点仅有的源点是奇点，但在超声速源点的情形，奇点分布在以源点为頂点的 Mach 錐上。因此在应用到实际問題时，不能使用集中在一点的超声速源，而必須考虑分布在綫上或平面上的源点。扰动很强地集中在 Mach 錐附近的現象，是超声速流动的一个特性。因此，扰动直到非常远的地方也不衰減。

§14 超声速軸对称流动[1]

考虑分布在 x 軸上的源点，令其强度的分布函数为 $f(x)$。設 $f(x)$ 受有如下的限制：

$$\left.\begin{aligned} &当\ x>0\ 时, \quad \lim_{x\to 0} f(x)=0,\\ &当\ x<0\ 时, \quad f(x)=0. \end{aligned}\right\} \tag{14.1}$$

[1] Kármán & Moore: Trans. Amer. Soc. Mech. Eng., Appl. Mech., 303 (1932).

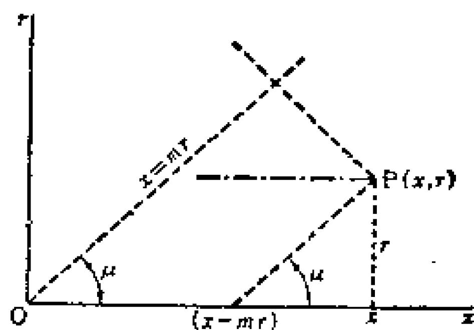


图 14.1

正如§13中所述，在超声速时，某一点的流动仅由該点的倒Mach錐內部的扰动源所决定。如图14.1所示，在点(x, r)誘导出来的扰动势，是由x軸上自0到$x-mr$的源点引起的扰动势的总和給出。卽对于$x \geqslant mr$有

$$\varphi(x, r) = -\int_0^{x-mr} \frac{f(\xi)d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - m^2r^2}}, \qquad (14.2)$$

对于$x<mr$显然有

$$\varphi(x, r) = 0.$$

今作变换$x-\xi = mr\cosh\sigma$，則(14.2)变为

$$\varphi(x, r) = -\int_0^{\cosh^{-1}(x/mr)} f(x - mr\cosh\sigma)d\sigma. \qquad (14.3)$$

由(14.2)或(14.3)給出的扰动势，表示一个超声速軸对称流动的解。

最初若設$f(\xi) = k\xi$（k是常数），則由(14.3)可得

$$\varphi = -k\int_0^{\cosh^{-1}(x/mr)} (x - mr\cosh\sigma)d\sigma$$

$$= -k\left[x\cosh^{-1}\frac{x}{mr} - \sqrt{x^2 - m^2r^2}\right]. \qquad (14.4)$$

若用此式計算扰动速度分量，則得下列結果：

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -k\cosh^{-1}\frac{x}{mr}, \quad v = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = km\sqrt{\frac{x^2}{m^2r^2} - 1}. \quad (14.5)$$

在此解內u和v仅是x/r的函数，在以原点为頂点以x軸为軸的圓錐上取常数值。这是第7章所述錐型流的特例。

若考虑軸平行于来流且半頂角为ε的圓錐，則其表面上的边界条件是

$$\text{当 } x/r = \cot\varepsilon \text{ 时有} \qquad v/(U+u) = \tan\varepsilon,$$

U 是来流速度。若設

$$\frac{k}{U}=\frac{\tan\varepsilon}{\sqrt{\cot^2\varepsilon-m^2}+\tan\varepsilon\cosh^{-1}(\cot\varepsilon/m)}, \qquad (14.6)$$

則由(14.5)这个边界条件一定被滿足。于是可以知道，(14.2)及(14.3)是表示攻角为零的圓錐周圍的超声速势函数。

在綫性理論里，压力系数 C_p 由(11.10)給出❶。使用(14.4)，(14.5)計算圓錐表面($x/r=\cot\varepsilon$)的 C_p，則得到如下的結果：

$$C_p=\frac{2\tan\varepsilon\cosh^{-1}(\cot\varepsilon/m)}{\sqrt{\cot^2\varepsilon-m^2}+\tan\varepsilon\cosh^{-1}(\cot\varepsilon/m)}. \qquad (14.7)$$

其次，使用分布在直綫上的源点，来求尖头平滑而細长的旋轉体以攻角0放在超声速流动中时的流动。此时問題的重点是怎样将(14.1)里的未知函数 $f(x)$ 和旋轉体的形状联結起来。

由(14.2)和(14.3)求 r 方向的速度分量 v，得到

$$v=\frac{\partial\varphi}{\partial r}=m\int_0^{\cosh^{-1}(x/mr)}f'(x-mr\cosh\sigma)\cosh\sigma\,d\sigma$$

$$=\frac{1}{r}\int_0^{x-mr}\frac{(x-\xi)f'(\xi)d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2-m^2r^2}},$$

在計算过程中曾利用了对于 f 的条件(14.1)。在此式內取 $r\to0$ 时的极限，得到

$$(rv)_{r\to0}=\int_0^x f'(\xi)d\xi=f(x).$$

就是說，在軸上 v 本身虽然发散，但 rv 却是有限的。于是 rv 在 $r=0$ 附近可以展成 r 的級数，和平面型問題边界条件(参照§11)的情形相同，当物体的半徑 $\bar{r}(x)$ 和 x 比較是非常小时，可以近似地令

$$(rv)_{r=\bar{r}}=(rv)_{r=0}.$$

---

❶ 对于細长的物体，压力系数的公式应修正为 $C_p=-\frac{2u}{U}-\frac{1}{U^2}(v^2+w^2)$（見校后記所附参考文献[3]）。——校者注

在 $r=\bar{r}$ 时有 $v/(U+u)=d\bar{r}/dx$，所以略去高阶小量后，得到

$$\bar{r}\frac{d\bar{r}}{dx}=\frac{1}{U}(rv)_{r=0}=\frac{1}{U}f(x),$$

或

$$f(x)=UF'(x),\quad \bar{r}^2(x)=2F(x), \tag{14.8}$$

这样就把源点分布函数 $f(x)$ 和旋轉体的形状联結起来了。于是 φ 可由如下的形式給出：

$$\begin{aligned}\varphi(x,r)&=-U\int_0^{x-mr}\frac{F'(\xi)d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2-m^2r^2}}\\&=-U\int_0^{\cosh^{-1}(x/mr)}F'(x-mr\cosh\sigma)d\sigma.\end{aligned} \tag{14.9}$$

若物体的长度到 $x=l$ 終止，则对于 $x>mr+l$，积分的上限必須用 l 代替 $x-mr$。

若(14.8)里的 $F(x)$ 具有性质

$$\lim_{x\to0}F'(x)=0,$$

则条件(14.1)可以被滿足。具有有限頂角且尖头的旋轉体在头部有 $\bar{r}\sim x$，$F\sim x^2$，所以条件(14.1)恒被滿足。利用这个条件計算速度分量，可得

$$\left.\begin{aligned}u=\frac{\partial\varphi}{\partial x}&=-U\int_0^{x-mr}\frac{F''(\xi)d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2-m^2r^2}},\quad mr\leqslant x\leqslant mr+l\\&=-U\int_0^{l}\frac{F''(\xi)d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2-m^2r^2}},\quad x>mr+l\end{aligned}\right\} \tag{14.10}$$

$$\left.\begin{aligned}v=\frac{\partial\varphi}{\partial r}&=\frac{U}{r}\int_0^{x-mr}\frac{(x-\xi)F''(\xi)d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2-m^2r^2}},\quad mr\leqslant x\leqslant mr+l\\&=\frac{U}{r}\int_0^{l}\frac{(x-\xi)F''(\xi)d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2-m^2r^2}}.\quad x>mr+l\end{aligned}\right\} \tag{14.11}$$

其次求物体表面上的压力系数。若施行变换 $x-\xi=mr\cosh\sigma$，(14.10)可計算如下：

$$\frac{u}{U}=-\int_0^{\cosh^{-1}(x/mr)}F''(x-mr\cosh\sigma)d\sigma$$

$$=-F''(0)\cosh^{-1}\frac{x}{mr}-\int_0^{x-mr}\frac{dF''(\xi)}{d\xi}\cosh^{-1}\left(\frac{x-\xi}{mr}\right)d\xi.$$

在这个近似里，物体表面上的值可以用运算 $r\to 0$ 来求出。若考虑到 $z\to\infty$ 时 $\cosh^{-1}z\to\log(2z)$ 而求 $r\to 0$ 时的 u 的渐近表示式，则对于表面速度 u_0 可以得到如下的式子：

$$\frac{u_0}{U}=-F''(0)\log\frac{2x}{mr}-\int_0^x\log\left(2\frac{x-\xi}{mr}\right)\frac{dF''(\xi)}{d\xi}d\xi$$

$$=-\left[F''(0)\log\frac{2x}{mr}+\{F''(x)-F''(0)\}\log\frac{2}{mr}\right.$$

$$\left.+\int_0^x\log(x-\xi)\frac{dF''}{d\xi}d\xi\right],$$

所以

$$\frac{u_0}{U}=-\left[F''(0)\log x+F''(x)\log\frac{2}{mr}\right.$$

$$\left.+\int_0^x\log(x-\xi)\frac{dF''}{d\xi}d\xi\right]. \qquad (14.12)$$

将此式代入(11.10)求 C_p，则表面压力系数变为

$$C_p=2\left[F''(0)\log x+F''(x)\log\frac{2}{mr}\right.$$

$$\left.+\int_0^x\log(x-\xi)F''(\xi)d\xi\right]. \qquad (14.13)$$

若在物体前端($x=0$)及后端($x=l$, $r=0$) $F''\neq 0$ 时(前后端顶角都有限的情形)，则 C_p 在前后端都是发散的。在其附近作正确計算时必須利用考虑到激波的錐型流理論。

其次計算阻力。物体从流体所受到的力，可以从包圍着物体的任意考察面上作用的压力，及出入于該面的动量，用牛頓动量定律求出。取和物体同軸的圓柱作为考察面，它的前表面 S_1 在 $x=0$，后表面 S_2 在 $x=\infty$ (图 14.2)。若物体的长度 l 为有限时，

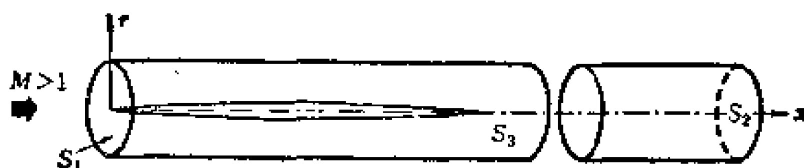


图 14.2

则由(14.10)在S_2面上有$u=0$，所以自S_2流出的x方向的动量是

$$\rho_\infty\int_{S_2}(U+u)^2dS=\rho_\infty U^2S_2,$$

这又等于通过S_1面流入的x方向的动量。在S_2有$u=0$，所以压力等于来流的静压，于是等于S_1面的压力。结果在S_1及S_2的x方向的力和动量是平衡的，所以若在物体上作用着阻力D时，它必须和在侧面S_3上的动量平衡。因为侧面到处平行于x轴，所以压力沒有x方向的分量，因而沒有考虑的必要。于是阻力D可表示如下：

$$D=-\rho_\infty\int_{S_3}uv\,dS=-\rho_\infty\int_{S_3}uv\cdot 2\pi r dx. \tag{14.14}$$

这里ρ_∞是来流的密度，r是圆柱面S_3的半徑。S_3的半徑任意选取时，D的値不发生变化，所以在这里取r比物体的最大半徑稍为大一些。这意味着在(14.14)的积分里可設$r\to 0$❶。于是(14.14)可写为

$$D=-2\pi\rho_\infty\int_0^\infty u_0(rv)_0dx,$$

标数0表示$r\to 0$时的极限值。由(14.8)及其前一式有$(rv)_0=UF'(x)$，又在(14.12)里已求得u_0，将这些式子代入上式，则得

$$D=2\pi\rho_\infty U^2\int_0^\infty\Big[F''(0)F'(x)\log x+\log\left(\frac{2}{mr}\right)F'(x)F''(x)$$
$$+F'(x)\int_0^x\log(x-\xi)\frac{dF''}{d\xi}d\xi\Big]dx,$$

❶ 由于在綫性化理論中解的定义范圍在$r>0$，而积分(14.14)和曲面的选取无关，故可令$r\to 0$。原书中这样的叙述是不恰当的。——校者注

考慮到

$$\int_0^\infty F'(x)F''(x)dx=|(1/2)F'^2(x)\Big|_0^\infty=0$$

时，則得到

$$D=2\pi\rho_\infty U^2\left[F''(0)\int_0^\infty F'(x)\log x\,dx+I\right]$$

$$I=\int_0^\infty F'(x)dx\int_0^x\log(x-\xi)\frac{dF''}{d\xi}d\xi.$$

在这个二重积分里变更积分順序后，利用在 $x=\infty$ 时，$F=F'=F''=0$ 的条件（这意味着物体的長度是有限或者无限时，在 $x=\infty$ 处变成截面面积沒有变化的圓柱），作分部积分，I 可計算如下：

$$I=-F''(0)\int_0^\infty F'(x)\log x\,dx$$

$$-\int_0^\infty F''(\xi)d\xi\frac{d}{d\xi}\int_\xi^\infty\log(x-\xi)F'(x)dx,$$

于是

$$D=-2\pi\rho_\infty U^2\int_0^\infty F''(\xi)d\xi\frac{d}{d\xi}\int_\xi^\infty\log(x-\xi)F'(x)dx$$

$$=-2\pi\rho_\infty U^2\int_0^\infty F''(\xi)d\xi\int_\xi^\infty\log(x-\xi)F''(x)dx, \qquad (a)$$

变更积分順序，得到

$$D=-2\pi\rho_\infty U^2\int_0^\infty F''(x)dx\int_0^x\log(x-\xi)F''(\xi)d\xi. \qquad (b)$$

在(a)中形式上交換积分变量 ξ 与 x 后，D 的值不改变，所以也可以写为

$$D=-2\pi\rho_\infty U^2\int_0^\infty F''(x)dx\int_x^\infty\log(\xi-x)F''(\xi)d\xi, \qquad (c)$$

(b)和(c)相加，最后得到如下的結果：

$$D=-\pi\rho_\infty U^2\int_0^\infty F''(x)dx\int_0^\infty\log|x-\xi|F''(\xi)d\xi. \qquad (14.15)$$

当物体的長度終止于 l 时，在 $\xi>l$，$F''(\xi)=0$，所以

$$D=-\pi\rho_\infty U^2\int_0^l\int_0^l F''(x)F''(\xi)\log|x-\xi|\,dx\,d\xi. \quad (14.16)$$

此結果的最显著的特点是阻力D和来流 Mach 数无关。

§15 在平面上分布的超声速源点❶

现在考虑在xy平面上分布的超声速源点所誘导出来的流动。設来流以超声速的速度U向x方向流动。又假定源点强度分布函数为$f(x, y)$，且当$x<0$时$f(x, y)=0$。

在xy平面上点(ξ, η)的源点对任意点(x, y, z)誘导出来的扰动势$d\varphi(x, y, z)$，由(13.4)可表示为

$$d\varphi(x, y, z)=\frac{-f(\xi, \eta)d\xi\,d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2-m^2[(y-\eta)^2+z^2]}}. \quad (15.1)$$

如§13所述，对于点(x, y, z)的流动发生影响的，只是位于(x, y, z)的倒 Mach 錐内部的扰动源点。倒 Mach 錐的方程$g(\xi, \eta, \zeta)=0$由

$$x-\xi=m\sqrt{(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$$

表出。在此式内令$\zeta=0$就得到倒 Mach 錐和xy平面的交綫。此交綫显然是双曲綫。如图15.1所示，仅在此双曲綫和η軸所包圍的区域内的源点和点(x, y, z)的流动有关系。于是在(x, y, z)的扰动势φ可用(15.1)在这个范圍里的积分来得，即

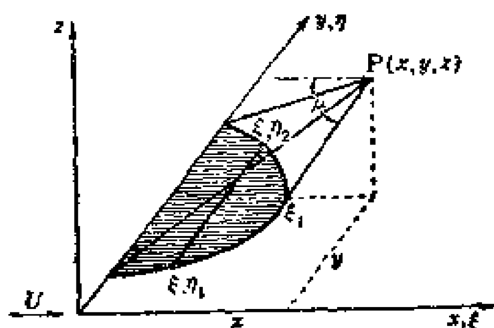


图 15.1

$$\varphi(x, y, z)=-\int_0^{\xi_1}d\xi\int_{\eta_1}^{\eta_2}\frac{f(\xi, \eta)d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2-m^2[(y-\eta)^2+z^2]}}. \quad (15.2)$$

这个积分的上下限是(图15.1)

❶ Puckett: J. Ae. Sci., 13(1946), 475.

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 &= y-\sqrt{(x-\xi)^2/m^2-z^2}, \\ \eta_2 &= y+\sqrt{(x-\xi)^2/m^2-z^2}, \\ \xi_1 &= x-m|z|. \end{aligned}\right\} \tag{15.3}$$

設薄物体的 z 坐标为 $z=\bar{z}(x, y)$，在綫性近似里，它的边界条件为

$$w(z=0)=(\partial\varphi/\partial z)(z=0)=U(\partial\bar{z}/\partial x),$$

利用这个条件，考虑将(15.2)的未知函数 $f(x, y)$ 用已知函数 $\bar{z}$ 表示出来。首先在(15.1)里 $d\varphi$ 是 z 的偶函数，所以 $dw=\partial(d\varphi)/\partial z$ 当 $z=0$ 时除 $x=\xi$, $y=\eta$ 的点以外都为 0. 即 xy 平面上的源点不会誘导出該平面內其他点的 z 方向的速度。于是和 xy 平面非常接近的点 $P(x, y, z)$ 的 w 的値，仅由 $\xi=x$, $\eta=y$ 的面积元素 $d\xi d\eta$ 上分布的源点所决定。在 $z\to+0$ 的极限时，上述面积元素 $d\xi d\eta$ 变得非常小，在此范圍里可认为

$$f(\xi, \eta)=f(\xi=x, \eta=y)\equiv F.$$

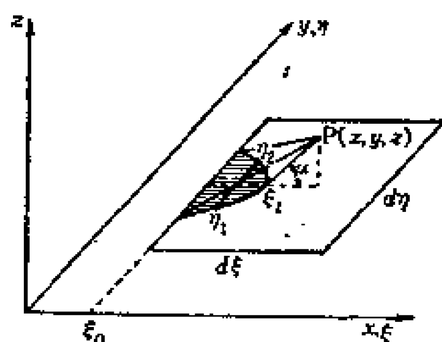


图 15.2

$d\xi d\eta$ 的范圍如图 15.2 所示，設 ξ 是从 ξ_0 到 $\xi_0+d\xi$，則在 $d\xi d\eta$ 上强度为 F（常数）的源点在 P 点引起的扰动势 φ_1 由(15.2)可写为

$$\varphi_1(x, y, z)=-F\int_{\xi_0}^{\xi_1}d\xi\int_{\eta_1}^{\eta_2}\frac{d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2-m^2[(y-\eta)^2+z^2]}},$$

η_1, η_2, ξ_1 已在(15.3)中給出。对于右边的积分，有

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2}\frac{d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2-m^2[(y-\eta)^2+z^2]}}$$
$$=-\frac{1}{m}\left|\sin^{-1}\frac{m(y-\eta)}{\sqrt{(x-\xi)^2-m^2z^2}}\right|_{\eta_1}^{\eta_2}=\frac{\pi}{m},$$

所以設 $\xi_1=x-mz$，得到

$$\varphi_1=-\frac{\pi}{m}F(\xi_1-\xi_0)=\pi Fz-\frac{\pi}{m}F(x-\xi_0),$$

于是

$$w(x,\ y,\ +0)=\partial\varphi_1/\partial z=\pi F=\pi f(x,\ y),$$

同样地有

$$w(x,\ y,\ -0)=-\pi f(x,\ y). \tag{15.4}$$

把上式代入先前表示的边界条件，则有

$$f(x,\ y)=(U/\pi)(\partial\bar{z}/\partial x).$$

于是，具有表面 $z=\bar{z}(x,\ y)$ 的薄物体放置在超声速流动里的扰动势 φ 可表示如下：

$$\varphi(x,\ y,\ z)=-\frac{U}{\pi}\int_0^{\xi_1}d\xi\int_{\eta_1}^{\eta_2}\frac{(\partial\bar{z}/\partial\xi)(\xi,\ \eta)d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2-m^2[(y-\eta)^2+z^2]}}. \tag{15.5}$$

φ 是 z 的偶函数，而 $\partial\varphi/\partial z$ 是奇函数，所以利用平面上分布的源点可以处理的物体一般只是攻角为0的对称物体。(15.5)里的 $\partial\bar{z}/\partial\xi$ 必须解释为表示在物体上表面($z>0$)的梯度。

第6章 超声速綫性机翼理論

§16 超声速二維机翼理論

考慮和来流相垂直的平面二維机翼。設将机翼放在xy平面上，取其前緣作y軸。因为是二維机翼，所以有$\bar{z}=\bar{z}(x)$。此时(15.5)变成下面的形式：

$$\varphi(x, y, z)=-\frac{U}{\pi}\int_0^{\xi_1}\bar{z}'(\xi)d\xi\int_{\eta_1}^{\eta_2}\frac{d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+m^2[(y-\eta)^2+z^2]}},$$

积分的上下限由(15.3)給定。将上式积分，求得φ为

$$\varphi=-(U/m)[\bar{z}(x-m|z|)-\bar{z}(0)] \quad (x\geqslant mz\geqslant 0), \tag{16.1}$$

将φ微分求得u, w和机翼表面上的C_p，其結果如下：

$$\left.\begin{aligned} u&=-(U/m)\bar{z}'(x-m|z|),\\ w&=\pm U\bar{z}'(x-m|z|),\\ C_p&=(2/m)\bar{z}'(x) \end{aligned}\right\} \quad (x\geqslant m|z|), \tag{16.2}$$

这里的正負号分别表示对于$z<0$, $z>0$的值。

由(16.1)及(16.2)可知，φ, u, w在$x-m|z|=$常数的綫上是不变的。这意味着：在二維的情形下，物体所产生的扰动以不变强度沿下游 Mach 綫傳播。

其次考虑关于(x, y)平面不对称的机翼剖面。設翼面的z坐标为

$$\text{上表面：}\ \bar{z}=h(x), \qquad \text{下表面：}\ \bar{z}=k(x), \tag{16.3}$$

則对于区域$z\geqslant 0$的流动仅和机翼上表面有关，对于$z\leqslant 0$的流动仅和下表面有关。将(16.3)代入(16.1)和(16.2)，則分別得到上下表面的相应值。

通常設机翼的攻角为 α，中心綫的坐标为 $C(x)$，中心綫到机翼表面的距离(机翼厚度的一半)为 $T(x)$，則

$$h(x)=-\alpha x+C(x)+T(x),\qquad k(x)=-\alpha x+C(x)-T(x),$$

将此值代入(16.1)和(16.2)，且用标数 u, l 区别上下表面时，則得結果如下：

$$\left.\begin{aligned}\varphi_u&=(U/m)[(x-mz)\alpha-C(x-mz)+T(x-mz)],\\ \varphi_l&=(U/m)[-(x+mz)\alpha+C(x+mz)-T(x+mz)],\end{aligned}\right\}\tag{16.4}$$

$$\left.\begin{aligned}C_{p_u}&=\frac{2}{m}\left(-\alpha+\frac{dC}{dx}+\frac{dT}{dx}\right),\\ C_{p_l}&=\frac{2}{m}\left(\alpha-\frac{dC}{dx}+\frac{dT}{dx}\right).\end{aligned}\right\}\tag{16.5}$$

設机翼弦长为 c，机翼表面上 x 及 $x+dx$ 間的部分所受的阻力及升力各为 dD 及 dL，由 dL 繞机翼中心 $\left(x=\frac{c}{2}\right)$ 所生的俯仰力矩为 dN，再設翼面压力和来流静压的差为 Δp，則 dD, dL, dN 可以分别表示如下：

$$\left.\begin{aligned}dD&=(\Delta p_u h'-\Delta p_l k')dx,\\ dL&=(-\Delta p_u+\Delta p_l)dx,\\ dN&=-(x-c)dL\,dx=(\Delta p_u-\Delta p_l)(x-c)dx.\end{aligned}\right\}\tag{16.6}$$

而 $\Delta p/(1/2)\rho_\infty U^2=C_p$，所以阻力系数 C_D，升力系数 C_L，和繞50%翼弦点的俯仰力矩系数 C_M，可以分别由(16.5)和(16.6)計算，其結果如下：

$$\left.\begin{aligned}C_D&=\int_0^c\frac{2}{m}(h'^2+k'^2)\frac{dx}{c}\\ &=\frac{4}{m}\int_0^c\left[\left\{-\alpha+\left(\frac{dC}{dx}\right)\right\}^2+\left(\frac{dT}{dx}\right)^2\right]\frac{dx}{c},\\ C_L&=(4/m)\alpha,\\ C_M&=-\frac{4}{m}\int_0^c\frac{C(x)}{c}\frac{dx}{c}.\end{aligned}\right\}\tag{16.7}$$

在推导上面的結果时，曾利用了在前后緣($x=0$, c)有 $C(x)=0$ 的

条件。

由(16.7)可以断言，超声速二維机翼的 C_D 当 $C=T=0$ (平板机翼)时，取到最小值 $+4\alpha^2/m$❶，C_L 和 C，T 无关，且在 $C=0$ 时 $C_M=0$。

§17 后掠机翼理論❷❸

現在考虑沿翼展方向机翼剖面形状不变，且翼展是无限长的情形。假設这样的机翼放置在和来流方向有一定傾斜角的位置上，又設翼面是 xy 平面，原点取在前緣，这样的机翼就叫作后掠机翼(swept wing)。y 軸和前緣的夹角 σ 叫作后掠角(sweep-back angle)。

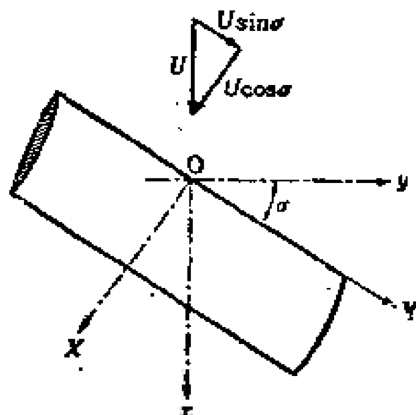


图 17.1 后掠机翼

今坐标系繞 z 軸旋轉 σ 角，取 X 軸垂直于前后緣，Y 軸平行于前后緣。設来流速度为 U，把它分解为 X 軸方向的流动(速度是 $U\cos\sigma$)和 Y 軸方向的流动(速度是 $U\sin\sigma$)。在綫性理論里解是可以迭加的，所以上述后掠机翼周圍的流动勢函数和扰动速度分量都可以分别先求出它們关于 X 方向的流动及 Y 方向流动的相应值，然后再取它們的和。因在 Y 方向的边界条件不变，所以由 Y 方向的流动所产生的扰动速度为 0，于是由这个机翼所产生的扰动速度等于来流的 X 分量(垂直于翼展)所产生的扰动速度。換言之，这个机翼周圍的流动不是由来流的 Mach 数 M 支配着，而是由 $M_n=M\cos\sigma$ 支配着。

---

❶ 原书誤为 $4/m$。——校者注

❷ Neumark: Aero. Quart, II (1950), 85.

❸ 后掠机翼較簡单的討論，可見校后記所附参考文献[3]。——校者注

由以上考察，卽使在超声速($M>1$)的情形，也随着 $M\cos\sigma<1$ 及 >1 而有亚声速及超声速的性质。特别在前一种情形，来流虽是超声速的，而阻力还是 0。今設 $\tan\sigma=k$, $\sqrt{M^2-1}=m$，則有

$$\left.\begin{array}{lll}(1) & M\cos\sigma<1 \text{ 时}, & k>m,\\ (2) & M\cos\sigma>1 \text{ 时}, & k<m.\end{array}\right\} \tag{17.1}$$

由图 17.2 明显地看出来，在 (1) 的情形，xy 平面上前緣比 Mach 綫傾斜些，在(2)的情形，Mach 綫却比前緣傾斜些。由翼面上分布的源点在 x 軸上所作的势函数，在各个情形都可用 (15.5) 表示如下：

$$\varphi(x,0,0)=-\frac{U}{\pi}\iint_A\frac{\bar{z}'(\xi,\eta)d\xi\,d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2-m^2\eta^2}}, \tag{17.2}$$

这里 A 表示包含在 $(x, 0, 0)$ 的倒 Mach 錐里的翼面部分。由图17.2明显地看出，积分范圍 A 当 $k<m$ 时是有限的，当 $k>m$ 时却是无限的。

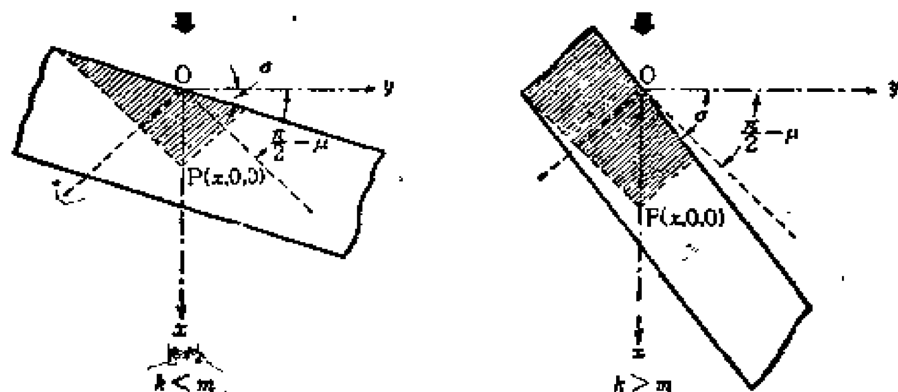


图　17.2

其次，考虑受到机翼影响的扰动范圍。如图 17.2 所示，当 $k<m$ 时，由机翼前緣发出的 Mach 綫总是由前緣向下游前进，所以机翼的扰动不能达到机翼的上游。于是和二維的情形一样，可以将机翼的上半部($z\geqslant 0$)及下半部($z\leqslant 0$)分别独立地处理，因而源点方法对于非对称机翼也是适用的。此时上表面的源点在机翼后方所誘导出来的压力(和 u 成比例)虽然可能和由下表面所誘导出来的

压力不同（实际上是一致的），但它却相当于在机翼的后方放置了另一个奇面，此时机翼后緣(或奇面的前緣)也比 Mach 綫傾斜些，所以奇面的存在对机翼不发生任何影响。于是在上下表面放上独立源点而得到的解，对于翼面恒能給出准确解来。另一方面，当 $k>m$ 时，由图 17.2 可知，机翼的影响可以达到前緣的前面。所以若假定在上下表面分别放上源点，就产生了机翼上游的 $z=0$ 上压力(或 u)的間断，而不能满足边界条件。卽是当 $k>m$ 时，通过前緣前方的扰动区域机翼的上下表面相互有影响，而不是互相独立的。因此，除去零攻角的对称机翼外，通常不能用源点的方法給出解来。

现在就 $k<m$ 的情形用源点的方法来作計算。可以用 $\xi=k\eta$ 来表示前緣。(17.2)的积分范圍 A 变为

关于 η，自 $-(x-\xi)/m$ 到 $(x-\xi)/m$；

关于 ξ，自 0 到 x.

若設 $\xi-k\eta=s$，則 s 是从点 (ξ, η) 沿 ξ 方向到前緣的距离，所以 $\bar{z}'(\xi, \eta)=\bar{z}'(s)$. 于是(17.2)变成

$$\left.\begin{aligned}&\varphi(x, 0, 0)=-\frac{U}{\pi}\int_0^x \bar{z}'(s)ds\int_{\eta_1}^{\eta_2}\frac{d\eta}{\sqrt{(x-s-k\eta)^2-m^2\eta^2}},\\&\eta_{1,2}=\mp\frac{x-\xi}{m}=\mp\frac{x-s}{m\mp k},\end{aligned}\right\}$$

經过計算后得 $$\varphi(x)=-U\int_0^x\frac{\bar{z}'(s)ds}{\sqrt{m^2-k^2}},$$

所以

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-U\frac{\bar{z}'(x)}{\sqrt{m^2-k^2}},\qquad C_p=-2\frac{u}{U}=2\frac{\bar{z}'(x)}{\sqrt{m^2-k^2}}.$$

取垂直于翼展的截面，設这个截面上翼面梯度是 $\bar{\zeta}'$，則有

$$\bar{\zeta}'=\bar{z}'/\cos\sigma,\qquad \bar{z}'=\bar{\zeta}'\cos\sigma=\bar{\zeta}'/\sqrt{1+k^2},$$

于是 $$C_p=\frac{2\bar{\zeta}'}{\sqrt{1+k^2}\sqrt{m^2-k^2}}.$$

令作用在翼展的正交方向的每单位翼展的空气动力为 F，并記 $F=C_F(1/2)\rho_\infty U^2$，則有

$$C_F=C_p\zeta'=\frac{2(\zeta')^2}{\sqrt{1+k^2}\sqrt{m^2-k^2}}.$$

若取来流速度的正交分量 $U\cos\sigma$ 作为相对速度，則

$$(C_F)_n=C_F\frac{U^2}{U^2\cos^2\sigma}=C_F(1+k^2).$$

更置 $M_n=M\cos\sigma$，$m_n^2=M_n^2-1$，則有

$$M_n=M/\sqrt{1+k^2},\ m_n^2=(m^2-k^2)/(1+k^2),$$

于是得到

$$(C_F)_n=2(\zeta')^2\sqrt{\frac{1+k^2}{m^2-k^2}}=2\frac{(\zeta')^2}{m_n},$$

这等于将梯度为 ζ' 的二維机翼，放置在 Mach 数为 $M_n(>1)$ 的流动中时的局部阻力系数。上边定义的力 F 是垂直于翼展的，所以 F 在来流方向的分量(阻力)是 $F\cos\sigma$。于是設 C_d 是局部阻力系数时，則

$$C_d=\frac{F\cos\sigma}{(1/2)\rho_\infty U^2}=(C_F)_n\cos^3\sigma$$
$$=\frac{2(\zeta')^2}{m}\frac{1}{(1+k^2)\sqrt{1-k^2/m^2}},$$

所以

$$\frac{C_d(\sigma=\sigma)}{C_d(\sigma=0)}=\frac{1}{(1+k^2)\sqrt{1-k^2/m^2}}. \tag{17.3}$$

当 m 相当大时，这个値小于1，而在 $m=k$ 时，它变成无穷大。二維后掠机翼的阻力系数 C_D 和后掠角 σ 間的关系如图 17.3 所示，当 $k>m$ 时 $C_D=0$，所以在实用上后掠机翼非常有利。

现在考虑具有攻角的二維平板机翼。这样的机翼，当来流是亚声速流和超声速流时，机翼的载荷分布定性地表示在图 17.4 里。对于这两种情形，其显著的差别在前后緣上显示出来：在亚声速流的情形，前緣产生无穷大的載荷(在綫性处理时)，在后緣由于

所謂 Kutta 条件❶，上下表面的流动是平滑地离开机翼后緣的，所以其載荷为 0。然而在超声速流的情形，机翼的前后緣都有有限的載荷(参照 §16)。在各个情形里，机翼的上下表面的流动都和来流均勻地傾斜着，所以在机翼上下表面所作用的空气动力都垂直于翼面，且具有垂直于来流的分量(升力)和平行的分量(阻力)。但在亚声速流时，由图 17.4 可以看出，前緣的載荷是无穷大，此处的压力非常低，按綫性理論看来，在此点产生无穷大的吸力。这个无穷大的吸力和前緣的无穷小面积的乘积是有限的，而且这个力恰好与作用在机翼的上下表面的阻力分量互相抵消，可以証明在整体上看来作用在机翼的阻力等于 0 (D'Alembert 悖理)。在超声速的情形里不产生这样的吸力，

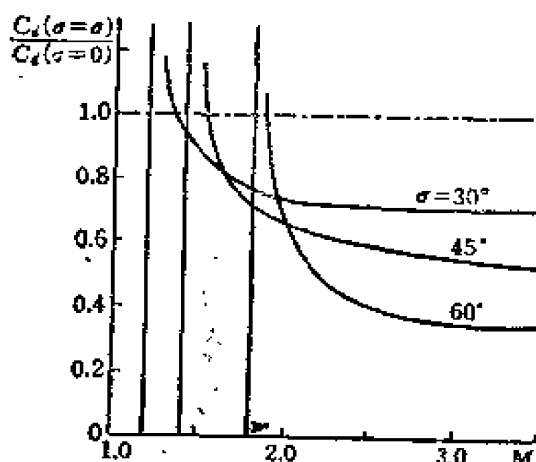


图 17.3 后掠机翼的阻力系数和 Mach 数的关系

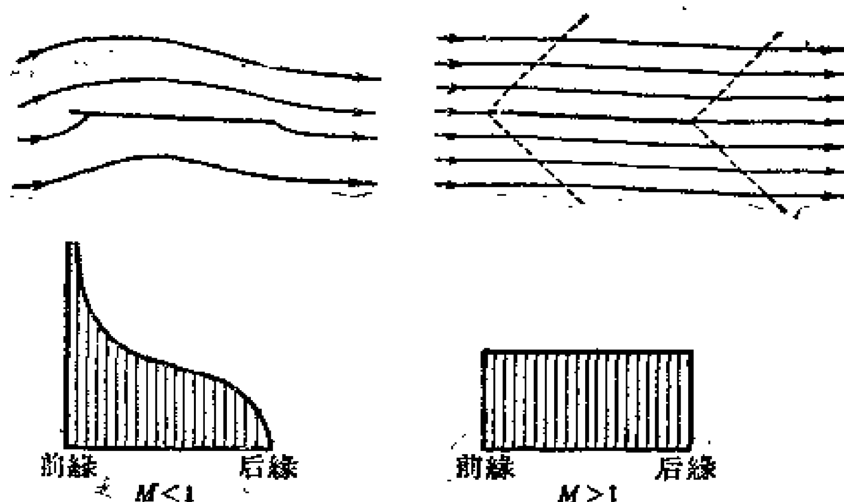


图 17.4 平板机翼周圍的流綫图和載荷分布

❶ 更确切应为 Жуковский–Kutta 条件，下同。——校者注

所以作用在机翼的上下表面的力照例形成为空气动力，即在有升力的同时也必伴有阻力的发生。

具有一般平面形状的三維机翼在翼緣上的局部性质，与其說由来流的 Mach 数本身所决定，不如說由垂直于翼緣所取的 Mach 数的分量所决定。将前述二維后掠机翼理論局部地应用于三維机翼的翼緣时，这个事实是容易理解的。将翼緣切綫和 y 軸的夹角 σ 看作是这个翼緣的局部后掠角，由(17.1)可知，垂直于翼緣而取的来流 Mach 数的分量随着 $k(=\tan\sigma)>m$，或 $<m$ 各小于1或大于1. 在前一情形翼緣的性质是亚声速的，后者是超声速的。

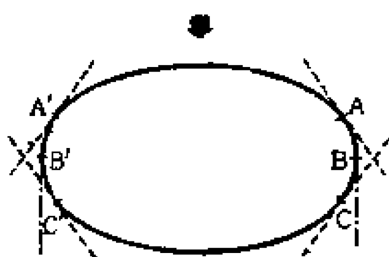


图17.5 超声速及亚声速前后緣

具有向外凸出的平面形状的一般三維机翼如图17.5所示。这个机翼由和 x 軸作 $\pm\mu(=\pm\sin^{-1}(1/M))$ 角的四条外切 Mach 綫所包圍着，其切点如图中 A, A', C, C'. 又設机翼的两端为 B, B'. 此时容易証明在 AA', CC' 的部分有 $k\leqslant m$，在 AC, $A'C'$ 的部分有 $k\geqslant m$. AA' 称为超声速前緣，CC' 称为超声速后緣。AB, $A'B'$ 是亚声速前緣，BC, $B'C'$ 是亚声速后緣。它們都各按照自己的名称而具有超声速或亚声速的性质。

特别是在亚声速后緣的情形，对于流动决不允許忘掉 Kutta 条件。

§18 超声速三維机翼的阻力理論

在綫性理論里，解是可以迭加的。所以繞流具有任意厚度弯度及攻角的机翼的扰动势，等于具有該厚度而攻角为0的对称机翼，厚度及攻角皆为0而仅有弯度的曲面机翼，及厚度和弯度皆为0而仅有攻角的平板机翼等分别独立地处在来流中所得的扰动势

的总和。其中第二个曲面机翼在超声速里不常使用，所以在这里不加考虑。第一个对称机翼以阻力为主要問題，第三个平板机翼以升力为主要問題。在这两种流动里对于 xy 平面(机翼所在平面)的对称性不同，在对称机翼的情形，φ, u, v 是对称的而 w 是非对称的。而在有攻角的平板机翼的情形恰恰相反。如 §15 所述，用机翼表面上源点分布的方法所得到的势函数对于 xy 平面是对称的，所以这个方法可以用来处理繞流一般对称三維机翼的流动。但是这个方法却不能原封不动地应用到一般升力的問題中。

攻角为 0 的对称机翼周圍的扰动势 φ 由 (15.5) 給出。重写如下：

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{U}{\pi}\int_0^{\xi_1} d\xi \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{(\partial \bar{z}/\partial \xi)(\xi, \eta)\, d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 - m^2[(y-\eta)^2 + z^2]}}, \quad (18.1)$$

积分范圍是包含在以 (x, y, z) 为頂点的倒 Mach 錐內部的翼面部分。已知机翼时，(18.1)右边的被积函数完全是已知的函数，积分的上下限也由机翼的平面形状所决定，所以在超声速三維机翼的阻力問題里，根本性的数学上的困难是沒有的，只是对于实际机翼的平面形状及截面形状作計算时，要化費不少的步驟和劳力。下面，作为最簡单的例子，我們将求出在翼展方向具有均匀截面的对称矩形机翼的阻力。

将机翼的前緣放在 y 軸上，原点取在翼展的中央。又設翼展为 b，翼弦为 c，展弦比为 AR❶ $(=b/c)$。根据机翼截面是均匀的这个条件，可知 $\bar{z}$ 仅为 x 的函数，又流动对于 xy 平面是对称的，所以只要对 $z \geq 0$ 的区域进行考察就足够了。

在流动里考虑点 $P(x, y, z)$。由机翼表面和 P 的相对关系可将扰动区域划分成如下三个部分：

(1) P 的倒 Mach 錐仅和前緣相交的情形。

❶ 根据习惯，展弦比 AR 常用 $\mathcal{R}$ 表示。——校者注

(2) P 的倒 Mach 錐和前緣及一边的側緣相交的情形。

(3) P 的倒 Mach 錐和二边側緣都相交，或者将翼面全部包含起来的情形。

在区域(1)里，P 点的流动完全不受翼端的影响，所以和翼展为无穷长的二維机翼的情形完全一样。在区域(2)内，流动只受到一个翼端的影响。在(3)里受到两个翼端的影响。所以为了搞清三維机翼的特性，只要对区域(2)及(3)进行考察就足够了。在求阻力时，翼面上的压力是必要的，所以考察翼面上的三个区域(1)，(2)，(3)，就可得到图 18.1 里所划分成的区域 I，II，III。这里的虚綫表示自翼端前緣发出的 Mach 綫。如前所述，在 I 里的压力系数用 §16 的二維理論可以求出，所以也能計算阻力。

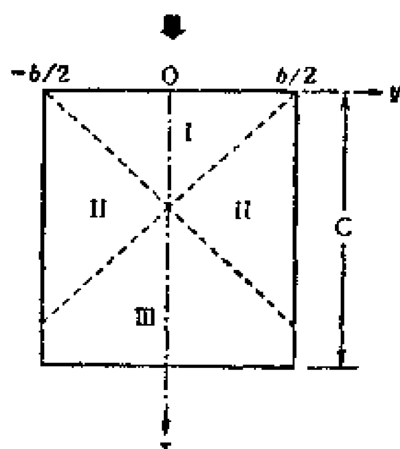


图 18.1

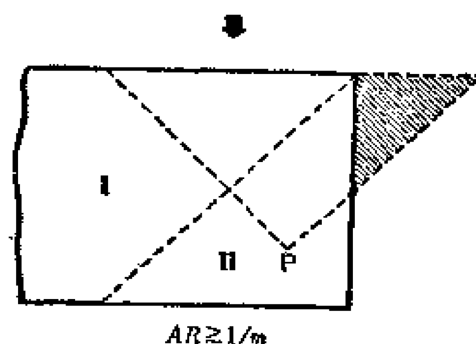


图 18.2

其次来考虑区域 II。II 内一点 $P(x, y, 0)$ 的倒 Mach 錐和翼面的交綫如图 18.2 所示是两条直綫，其一和翼端相交。今在翼端外添加上由这个 Mach 綫和前緣的延长綫所作成的三角形区域(如图 18.2 的阴影部分)，并且假定在这个区域内也有和翼面上相同的源点分布，则 P 点的势函数也和区域 I 完全一样，可用二維理論求出来。实际上阴影部分的源点强度为 0，所以在 $P(x, y)$ 的势函数 φ 等于自二維势函数 φ_1 減去阴影部分的源点分布所产

生的势函数所得的差，或者給与阴影部分以負的源点分布时的势函数为 $\Delta\varphi$，则有 $\varphi=\varphi_1+\Delta\varphi$. $\Delta\varphi$ 用(18.1)可写成如下形式：

$$\left.\begin{aligned}\Delta\varphi(x, y, 0)&=+\frac{U}{\pi}\int_0^{\xi_1}\bar{z}'(\xi)d\xi\int_{\frac{b}{2}}^{\eta_1}\frac{d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2-m^2(y-\eta)^2}}\\ \xi_1=x-m(b/2-y),&\qquad \eta_1=y+(x-\xi)/m\end{aligned}\right\}\quad(18.2)$$

对上式右面关于 η 积分，可得

$$\Delta\varphi(x, y, 0)=\frac{U}{\pi m}\int_0^{\xi_1}\bar{z}'(\xi)\cos^{-1}\frac{m(b/2-y)}{x-\xi}d\xi. \quad (18.3)$$

令由 $\Delta\varphi$ 在区域 II 内所产生的压力及在 x 方向的速度分量各为 Δp 及 Δu，则有

$$\frac{\Delta p}{\rho_\infty U^2/2}=-2\frac{\Delta u}{U}=-\frac{2}{U}\frac{\partial}{\partial x}(\Delta\varphi).$$

又由 Δp 作用在翼面上 x 方向的单位面积的空气动力記为 δD，考虑到机翼的两面，则有

$$\delta D=2\Delta p\cdot\bar{z}'(x),$$

所以

$$\delta D=-\frac{2\rho_\infty U^2}{\pi}\bar{z}'(x)\int_0^{\xi_1}\frac{\bar{z}'(\xi)(b/2-y)d\xi}{(x-\xi)\sqrt{(x-\xi)^2-m^2(b/2-y)^2}}, \quad (18.4)$$

将 δD 在区域 II 内积分，则得到由 $\Delta\varphi$ 所产生的阻力增量 ΔD. 今考虑在机翼的展弦比 AR 相当大的翼面上并不存在区域 III 的情形$\left(这相当于\ \frac{AR}{2}>\tan\mu=\frac{1}{m}\ 的情形\right)$，则

$$\begin{aligned}\Delta D&=\int_0^c dx\int_{b/2-x/m}^{b/2}\delta D dx\,dy\\ &=-\frac{2\rho_\infty U^2}{\pi}\int_0^c\bar{z}'(x)dx\int_{b/2-x/m}^{b/2}(b/2-y)dy\\ &\quad\cdot\int_0^{\xi_1}\frac{\bar{z}'(\xi)d\xi}{(x-\xi)\sqrt{(x-\xi)^2-m^2(b/2-y)^2}}\\ &=-\frac{2\rho_\infty U^2}{\pi}\int_0^c\bar{z}'(x)dx\int_0^x\frac{\bar{z}'(\xi)d\xi}{(x-\xi)}\end{aligned}$$

$$\cdot \int_{b/2-(x-\xi)/m}^{b/2} \frac{(b/2-y)dy}{\sqrt{(x-\xi)^2-m^2(b/2-y)^2}}$$

$$= -\frac{2\rho_\infty U^2}{m^2\pi}\int_0^c \bar{z}'(x)\,dx\int_0^x \bar{z}'(\xi)d\xi$$

$$= -\frac{\rho_\infty U^2}{m^2\pi}\left|\bar{z}^2(x)\right|_0^c,$$

然而在攻角为0的情形，前后緣都在 xy 平面上，所以 $\bar{z}(0)=\bar{z}(c)=0$，結果得到

$$\Delta D=0 \qquad (AR>2/m \text{ 的情形}) \tag{18.5}$$

这个結果是很有趣的。在此情形矩形机翼总的阻力系数等于具有同一截面形狀的二維机翼的阻力系数。但这并不意味着对于翼端附近单位翼展的阻力是常量，而且和二維机翼的值相等。由 $\Delta\varphi$ 所产生的翼展方向的截面阻力增量 $\Delta D'$ 可实际計算如下。对于 $y\geqslant b/2-x/m$，有

$$\Delta D'=\int_0^c \delta D\cdot dx$$

$$= -\frac{2\rho_\infty U^2}{\pi}\left(\frac{b}{2}-y\right)\int_{m(b/2-y)}^c \bar{z}'(x)dx$$

$$\cdot \int_0^{x-m(b/2-y)} \frac{\bar{z}'(\xi)d\xi}{(x-\xi)\sqrt{(x-\xi)^2-m^2(b/2-y)^2}}.$$

若不給出 $\bar{z}(x)$ 时，这个积分就不能計算，而仅在翼端的值可用极限运算 $y\to b/2$ 来求出。今若作变换 $s=(x-\xi)/m(b/2-y)$，則

$$\lim_{y\to b/2}\left(\frac{b}{2}-y\right)\int_0^{x-m(b/2-y)} \frac{\bar{z}'(\xi)d\xi}{(x-\xi)\sqrt{(x-\xi)^2-m^2(b/2-y)^2}}$$

$$= \frac{\bar{z}'(x)}{m}\int_\infty^1 \frac{-ds}{s\sqrt{s^2-1}} = \frac{\pi}{2}\,\frac{\bar{z}'(x)}{m},$$

于是

$$\Delta D'\left(y=\frac{b}{2}\right) = -\frac{1}{2}\left[\frac{2\rho_\infty U^2}{m}\int_0^c \{\bar{z}'(x)\}^2 dx\right].$$

上式右边方括弧里是可由 (16.7) 来求的具有截面形状 $\bar{z}(x)$ 的二維对称机翼在每一单位翼展上的阻力。由此可知，对称矩形机翼

翼端的截面阻力，等于具有相同机翼截面的二維机翼的值的一半。另一方面，总阻力等于二維机翼时的阻力，所以在翼端的內側，必然产生截面阻力較二維机翼的值大的部分。

其次，在 $1/m \leqslant AR \leqslant 2/m$ 的情形必然有区域 III 出現。由两个翼端发出的 Mach 綫和后緣相交。如图 18.3 所示，这个区域里一点 $P(x, y)$ 的流动勢函数和二維勢函数的差，可以根据前面所述的同样理由，利用在两个翼端外的三角形区域(图上的阴影部分)上所放置的負的源点分布計算出来。此时两个翼端的影响由各个翼端效应的和給出，而各个翼端对于总阻力的效应为 0，所以这样的矩形机翼的阻力系数等于二維机翼的值。于是和前一个情形結合起来，只要 $AR \geqslant 1/m$ 时，具有均匀截面的对称矩形机翼无升力的阻力系数与二維机翼的值一致。

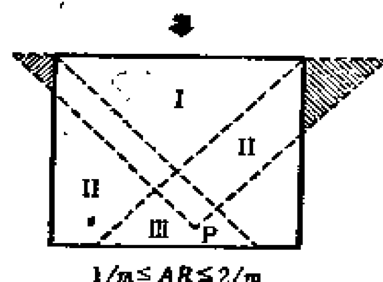


图 18.3

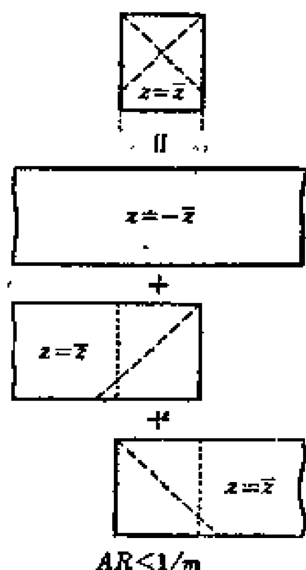


图 18.4

最后，考虑 $AR < 1/m$ 的情形。在这样的矩形机翼里，翼端前緣发出的 Mach 綫和側緣相交。对于繞流該机翼的边界条件，如图 18.4 所示，可由具有截面为 $z=-\bar{z}(x)$ 的无限长机翼；具有截面为 $z=+\bar{z}(x)$ 且在 $y=-\infty$ 到 $+b/2$ 延展的半无限长机翼；以及对于 x 軸和第二个对称的半无限长机翼等三个情形互相迭加起来。設它們各各独立时的勢函数为 $-\varphi_1$，φ_2，φ_3。而 φ_2，φ_3 又和 $AR \geqslant 1/m$ 的情形同样可設为

$$\varphi_2=\varphi_1+(\Delta\varphi)_1, \qquad \varphi_3=\varphi_1+(\Delta\varphi)_2,$$

且 $(\Delta\varphi)_1$ 及 $(\Delta\varphi)_2$ 可由(18.3)的 $\Delta\varphi$ 求得。所以繞流原来的矩形

机翼的流动势函数 φ 由

$$\varphi=-\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3=\varphi_1+(\Delta\varphi)_1+(\Delta\varphi)_2$$

給出。阻力 D 可写成

$$D=2\iint_W \Delta p\cdot\bar{z}'dx\,dy=-2\rho_\infty U\iint_W \bar{z}'\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx\,dy$$
$$=D_1+(\Delta D)_1+(\Delta D)_2,$$

这里的 D_1 是做为二維机翼时的阻力，$(\Delta D)_1$ 及 $(\Delta D)_2$ 各为由 $(\Delta\varphi)_1$ 及 $(\Delta\varphi)_2$ 所产生的阻力。利用(18.4)的 δD，可求得 $(\Delta D)_1$ 如下：

$$(\Delta D)_1=\int_0^c dx\int_{b/2-x/m}^{b/2}(\delta D)_1\,dx\,dy-\int_{mb}^c dx\int_{b/2-x/m}^{-b/2}(\delta D)_1\,dx\,dy,$$

这里右边第一項是图 18.5 里 AGF 上 $(\delta D)_1$ 的积分，第二項是 ADE 上的积分。曾如(18.5)所示，右边第一項为 0。所以若考虑左右两个翼端都存在时，則得到

$$\Delta D=(\Delta D)_1+(\Delta D)_2$$
$$=-2\int_{mb}^c dx\int_{b/2-x/m}^{-b/2}(\delta D)\,dx\,dy,$$

δD 由(18.4)給出。算出右边的积分，則得 ΔD 如下：

图 18.5

当 $AR<\dfrac{1}{m}$ 时，

$$\Delta D=\frac{4\rho_\infty U^2}{\pi m^2}\int_{mb}^c \bar{z}'(x)dx\int_0^{x-mb}\bar{z}'(\xi)\frac{\sqrt{(x-\xi)^2-m^2b^2}}{x-\xi}d\xi.$$

若不給出 $\bar{z}(x)$ 时，此式就不能再往下計算，但当 $AR\to 0$ 的极限情形，$\Delta D=-D_1$，所以就可以証明 $D=0$ 了。

§19 超声速三維机翼的升力理論[1]

在此考虑无厚度机翼的升力問題。首先考察它和对称机翼阻

[1] Ward: Quart. J. M. Appl. Math., II (1949), 136.

力問題的差别。在 xy 平面上放置的一般机翼的平面形状如图 19.1 所示。xy 平面可划分成三个部分：翼面 S，机翼的超声速前緣和它的两条外切 Mach 綫前方的区域 R，翼緣其他部分和两个外切 Mach 綫后方的区域 T。在区域 R 里未受到机翼的影响，所以在那里扰动势为 0。在翼面 S 上 φ_z 由条件

$$\varphi_z(x, y, 0)=w(x, y, 0)=U\bar{z}'(x, y)$$

給出。在阻力問題里，w 关于 xy 平面不是对称的，在区域 S（翼面）里，当 $z\to\pm0$ 时 $w\to\pm w_0(x, y)$，所以 w 在上下表面不連續地变化。另一方面，对于升力問題，机翼厚度可以

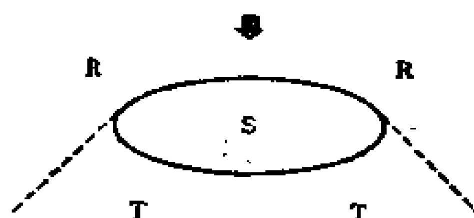


图 19.1

当作为零，所以上下翼面的梯度一致，w 在翼面 S 上沒有間断。最后，区域 T 是因机翼存在而产生扰动的部分，在阻力問題里，由于流动的对称性显然非有 $w=0$ 不可。然而在升力問題里，区域 T 的 w 值不能預先給出。但是在此情形下，由于 $\varphi_z=w$ 对于 xy 平面具有对称性，所以 φ 及 $u=\varphi_x$ 是 z 的奇函数，而且在 $z=0$ 时压力（从而 u）不能有間断，于是在区域 T 里的条件只能是由 $\varphi_x=0$ 給出。綜合以上各点可列表如下：

区域	阻力問題	升力問題
R	$\varphi=\varphi_x=\varphi_y=\varphi_z=0$	$\varphi=\varphi_x=\varphi_y=\varphi_z=0$
S	$\varphi_z=U\bar{z}'$（上下表面間断）	$\varphi_z=U\bar{z}'$（上下表面連續）
T	$\varphi_z=0$	$\varphi_x=0$

(19.1)

所以在阻力問題里，$z=0$ 的 φ_z 是完全給出来的，而在升力問題里，在 S 上給出 φ_z，在 T 上給出 φ_x 这是一种混合边値問題。因此，数学上处理时，前者除需要化大量劳力外并无根本的困难；但后者通常却要求解积分方程，所以从数学的角度来看后者远比前

者困难得多。

如前所述，用在翼面上放置源点分布而得到的 φ 对于 xy 平面是对称的，所以升力問題的边界条件不能照原样地被滿足。解决这个問題的方法，有在翼面上用偶极子分布代替源点分布的方法；§25 所介紹的应用錐型流理論的方法；以及应用源点分布的 Evvard 方法等等。但是为了灵活运用上述超声速源点的知識，我們将在这里詳述 Evvard 方法。

当考虑机翼的平面形状是由超声速前緣和超声速后緣所組成的特殊情形(此时翼端必然是尖的)时，升力問題也是非常簡单的。对于这样的机翼，图 19.1 里的区域 T 为机翼的超声速后緣和自翼端发出的 Mach 綫所包圍。所以若在 T 上不論放上多少扰动源点，对翼面絲毫不发生影响。这个事实意味着如果只考虑翼面 S 上的流动时，可以将 T 上的边界条件忽略掉。其理由是，可以求得滿足 S 上的条件 $\varphi_z=U\bar{z}'$ 而不滿足 T 上的条件 $\varphi_x=0$ 的解。今在此解上再迭加上在 T 上假定有适当奇点分布而得到的第二个解，令其滿足 $\varphi_x=0$ 的条件，則第一个和第二个解的和就是全区域的准确解。但是第二个解对翼面不会有任何效应，所以在仅考虑 S 时只要第一个解就够了。于是仅限于这个情形，对于机翼的上表面及下表面分別独立地使用源点分布的解法，就可以决定翼面上的流动。此时机翼厚度为 0，所以源点强度对于上下表面必須取相反的符号。

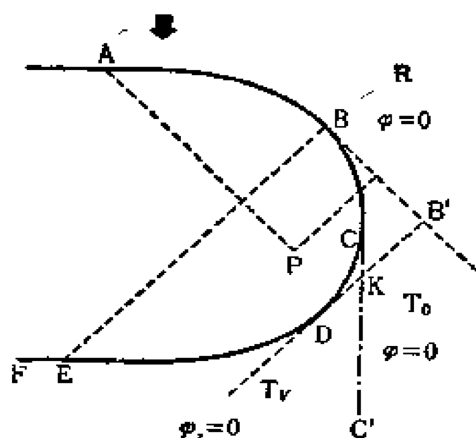


图 19.2

其次，稍微詳細地考虑具有亚声速前后緣机翼的边界条件。在图 19.2 里，$ABCDEF$ 是机翼的一部分，虛綫表示 Mach 綫。图內 BC 是亚声速前緣，CD 是亚声速后緣。

受翼面 S 影响的区域 T，被自翼端 C 发出且平行于 x 軸的直綫 CC' 划分成外側 T_0 及內側 T_V 两区域。区域 T_V 是升力面的尾流，存在着自由渦。在区域 T_0 里不存在自由渦，φ 在 $z=0$ 是連續的。如前所述，在 T_0 及 T_V 上有 $\varphi_x=0$，在 R 上有 $\varphi=0$。今考虑将 φ_x 沿 x 軸的平行綫自区域 R 到区域 T 积分。在区域 T_0 內一点 $(x,\ y)$ 的 φ 由 $\varphi=\int_R^T \varphi_x dx$ 求出，由上面的条件必有 $\varphi=0$。对于区域 T_V 里的点作同样运算，在积分路程的途中插进了 S，所以 φ 不能为 0。于是可将 T 上的边界条件表示为

$$\text{在 } T_0 \text{ 上有 } \varphi=0, \qquad \text{在 } T_V \text{ 上有 } \varphi_x=0. \tag{19.2}$$

又如 § 17 所述，对于亚声速后緣 CD 必須加上 Kutta 条件，在其上不能产生无穷大的速度。

§ 20 Evvard 方法(I) ❶

設想在图 19.2 里用 $ABB'DEF$ 代替实际的机翼 $ABCDEF$，則外緣都变为超声速前緣。所以按 § 19 所述，由假定，該翼面上的流动在上下表面分別独立的源点分布就可以决定。但在此情形里成問題的是，在实际的翼面上可由 $\bar{z}(x,\ y)$ 給出流动的梯度，由此可以預先决定对应的源点强度，但在翼端外的 $BB'DC$ 部分上，z 向的速度 w 在得到解以前是未知的。因此，为了求 φ 就必須解积分方程。Evvard 方法不用普通方法求积分方程的解，而給出了一种巧妙地利用边界条件求得該方程解的特殊方法。

首先将坐标系由 $(x,\ y)$ 变到特征坐标 $(\alpha,\ \beta)$：

$$\alpha=x-my, \qquad \beta=x+my. \tag{20.1}$$

若在 xy 平面上有 z 向的 φ_z 时，則該平面上的点 $(x,\ y,\ 0)$ 所产生的势函数可用(15.5)写成下列形式：

❶ Evvard: NACA TN 1382 (1947), 1484 (1947), 1585 (1948), Tech. Rep. 95 (1950).

$$\varphi(x,\ y,\ +0)=-\frac{1}{\pi}\iint_{A(x,y)}\frac{(\partial\varphi/\partial z)_{+0}\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2-m^2(y-\eta)^2}},\tag{20.2}$$

这里 $A(x, y)$ 表示点 $(x, y, 0)$ 的倒 Mach 錐内部使 $(\partial\varphi/\partial z)_{-0}\neq 0$ 的范圍。利用变换(20.1)可将(20.2)变为

$$\varphi(\alpha,\ \beta,\ +0)=\iint_{A(\alpha,\beta)}\frac{f(s,\ t)\,ds\,dt}{\sqrt{(\alpha-s)(\beta-t)}}.\tag{20.3}$$

这里

$$\left.\begin{aligned}f(\alpha,\ \beta)&=-\frac{1}{2\pi m}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{+0}=-\frac{U}{2\pi m}\frac{\partial\bar{z}}{\partial x}\equiv\lambda\quad(\text{翼面 } S)\\&=0\qquad\qquad\qquad\qquad(\text{区域 } R)\\&\equiv\mu\qquad\qquad\qquad\qquad(\text{区域 } T)\end{aligned}\right\}\tag{20.4}$$

但 μ 是未知函数。

首先考虑实际翼面不具有亚声速后緣的情形。这意味着(20.3)的积分区域 $A(\alpha, \beta)$ 中含有图 19.2 的区域 S, R, T_0，但不含 T'_V。从而由(19.2)可知，在 $A(\alpha, \beta)$ 中翼面外的部分有 $\varphi=0$。这样的机翼如图 20.1 所示。AA' 是超声速前緣，AB, $A'B'$ 都是亚声速前緣。α, β 坐标的原点取和翼相切的 Mach 綫的交点，为了方便可将翼緣的方程表示如下：

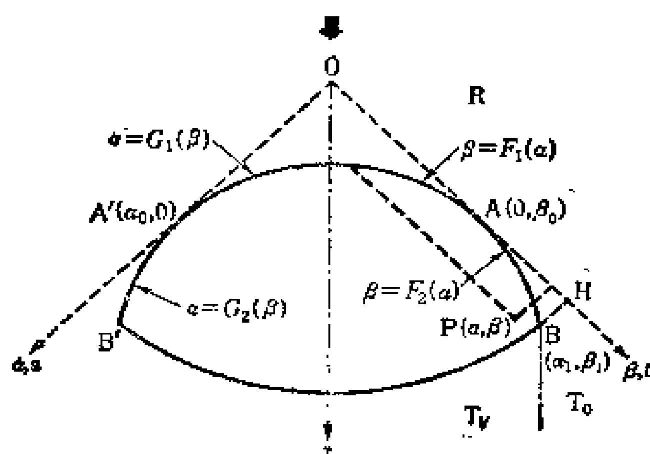


图 20.1

$$\left.\begin{aligned}AA'B':&\qquad \beta=F_1(\alpha),\\AB:&\qquad \beta=F_2(\alpha),\\A'AB:&\qquad \alpha=G_1(\beta),\\A'B':&\qquad \alpha=G_2(\beta).\end{aligned}\right\}\tag{20.5}$$

在靠近翼端翼面上的点 $P(\alpha, \beta)$ 的 φ，由 (20.3) 可以計算出来，此时积分范围 A 如图 20.2 所示，即自 P 发出的 Mach 綫与 AB 的交点引另一条 Mach 綫就可将积分范围 A 分成前后两个部分，前者含有区域 S 及 T_0，后者仅含有 S. 势函数 φ 由 (20.3)，(20.4)，(20.5) 可写成如下形式：

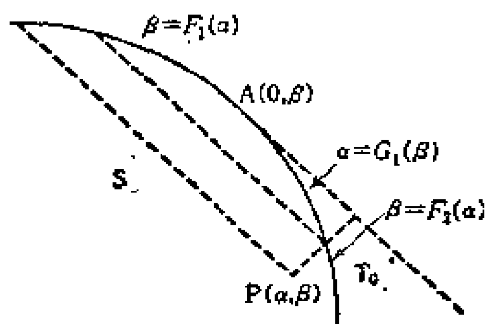


图 20.2

$$\varphi(\alpha, \beta) = \int_{G_1(\beta)}^{\alpha} \frac{ds}{\sqrt{\alpha - s}} \int_{F_1(s)}^{\beta} \frac{\lambda(s, t)}{\sqrt{\beta - t}} dt + \int_0^{G_1(\beta)} \frac{ds}{\sqrt{\alpha - s}} \left[\int_{F_1(s)}^{F_2(s)} \frac{\lambda(s, t) dt}{\sqrt{\beta - t}} + \int_{F_2(s)}^{\beta} \frac{\mu(s, t) dt}{\sqrt{\beta - t}} \right] \tag{20.6}$$

这里 $\mu(s, t)$ 是未知函数。

当 (α, β) 在区域 T_0 里时，(20.6) 也能成立（右边第一项为 0），且在該处由 (19.2) 有 $\varphi=0$，所以对于 $0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$, $F_2(\alpha) \leqslant \beta \leqslant \beta_1$，得到

$$\varphi = \int_0^{\alpha} \frac{ds}{\sqrt{\alpha - s}} \left[\int_{F_1(s)}^{F_2(s)} \frac{\lambda dt}{\sqrt{\beta - t}} + \int_{F_2(s)}^{\beta} \frac{\mu dt}{\sqrt{\beta - t}} \right] = 0.$$

当 (α, β) 是上述范圍里的点时，这个关系式也恒等地成立，所以必有

$$\int_{F_1(s)}^{F_2(s)} \frac{\lambda dt}{\sqrt{\beta - t}} + \int_{F_2(s)}^{\beta} \frac{\mu dt}{\sqrt{\beta - t}} = 0. \tag{20.7}$$

于是 (20.6) 的右边第二項为 0，因而得到下列关系式：

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\alpha, \beta, +0) &= \int_{G_1(\beta)}^{\alpha} \frac{ds}{\sqrt{\alpha - s}} \int_{F_1(s)}^{\beta} \frac{\lambda(s, t)}{\sqrt{\beta - t}} dt \\ \lambda &= -(U/2\pi m)(\partial \bar{z}/\partial x), \end{aligned} \right\} \tag{20.8}$$

这个式子的右边的积分范圍是图 20.3 的阴影部分。λ 由翼面的梯

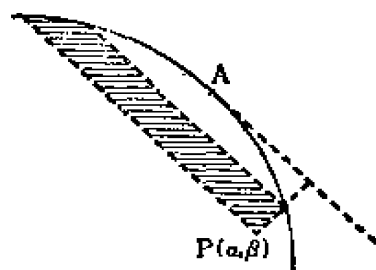


图　20.3

度給出，結果翼面上的 φ 可当作已知函数的积分而求得。

§21 Evvard 方法 (II)

本节将討論比前节更广泛的情形，即考虑翼端含有亚声速前緣及亚声速后緣的情形。在图 21.1 里，AB, $A'B'$ 是亚声速前緣，BC, $B'C'$ 是亚声速后緣。此时翼緣的方程可表示如下：

$$\left.\begin{array}{llll} AA'C': & \beta=F_1(\alpha), & A'AC: & \alpha=G_1(\beta), \\ ABC: & \beta=F_2(\alpha), & A'C'C: & \alpha=G_2(\beta). \end{array}\right\} \qquad (21.1)$$

又对这样的机翼，(20.3) 的积分范围也含有区域 T_V，所以 $f(\alpha, \beta)$ 可划分如下：

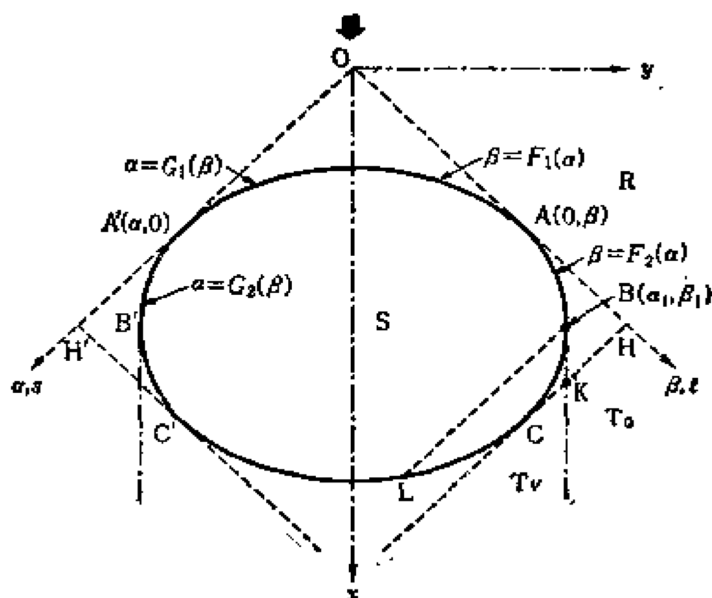


图　21.1

$$\left.\begin{aligned} f(\alpha,\ \beta) &= -(U/2\pi m)\bar{z}' \equiv \lambda & &\text{翼面 } S, \\ &= 0 & &\text{区域 } R, \\ &= \mu & &\text{区域 } T_0(HABK), \\ &= \mu_V & &\text{区域 } T_V(BKC), \end{aligned}\right\} \quad (21.2)$$

这里 μ 和 μ_V 都是未知函数。

在图 21.1 里，求 Mach 綫 BL 内側翼面上的 φ 时，积分区域不含区域 T_V (图 21.1 的 BKC)，所以对 BL 内側的点可应用前节的方法求得 φ。于是此处的問題是求 BCL 上的 φ。为此，首先决定在 BKC 上点的 φ 比較方便些。

由(19.2)，在区域 T_V 上有 $\varphi_x=0$，于是可設 $\varphi=\varphi_1(y)$。因为 $y=(\beta-\alpha)/2m$，所以有

$$\varphi(T_V)=\varphi_1(\alpha-\beta). \tag{21.3}$$

另一方面，在区域 T_0 内有 $\varphi=0$，所以在 T_0 和 T_V 的边界綫上有

$$\varphi_1=0.$$

这个边界綫的方程为

$$\alpha-\beta=\alpha_1-\beta_1\equiv\gamma_1,$$

結果可得

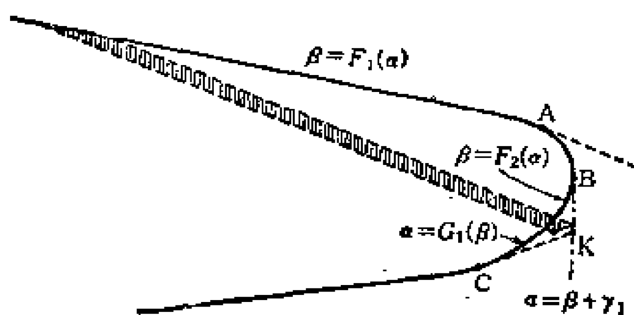


图 21.2

$$\varphi_1(\alpha_1-\beta_1)=0. \tag{21.4}$$

在图 21.2 里，代替实际翼端 ABC 而考慮假想翼端 $ABKC$ 时，在 BKC 上一点 φ 的表达式，形式上可以应用(20.8)。此时积分范圍是图 21.2 的阴影部分。这又可分解成翼面上及翼面外的两部分。結果在 BKC 上 $(\beta+\gamma_1\leqslant\alpha\leqslant G_1(\beta))$ 有

$$\begin{aligned}\varphi_1(\alpha,\ \beta)=\varphi_1(\alpha-\beta)=\int_{\beta+\gamma_1}^{\alpha}\frac{ds}{\sqrt{\alpha-s}}\Bigg[\int_{F_1(s)}^{F_2(s)}\frac{\lambda(s,t)\,dt}{\sqrt{\beta-t}} \\ +\int_{F_2(s)}^{\beta}\frac{\mu_V(s,\ t)\,dt}{\sqrt{\beta-t}}\Bigg].\end{aligned} \tag{21.5}$$

(21.5)是关于右边括弧里的量的 Abel 积分方程[1]。

Abel 积分方程可表示为

$$f(x)=\int_a^x \frac{u(\xi)}{\sqrt{x-\xi}}d\xi \tag{21.6}$$

的形式。这里 $f(\xi)$ 是已知函数，設它在区間 $a\leqslant\xi\leqslant x$ 里是有界連續的。(21.6) 的解为

$$u(x)=\frac{1}{\pi}\int_a^x \frac{f'(\xi)d\xi}{\sqrt{x-\xi}}=\frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(\xi)d\xi}{\sqrt{x-\xi}}, \tag{21.7}$$

証明从略。

应用(21.7)，则(21.5)的解为

$$\left.\begin{aligned}&\int_{F_2(\alpha)}^{\beta}\frac{\mu_V(\alpha,\ t)dt}{\sqrt{\beta-t}}+\int_{F_1(\alpha)}^{F_2(\alpha)}\frac{\lambda(\alpha,\ t)dt}{\sqrt{\beta-t}}\\&\qquad\qquad=\frac{1}{\pi}\int_{\beta+\gamma_1}^{\alpha}\frac{\varphi_1'(s-\beta)ds}{\sqrt{\alpha-s}}\\&\beta+\gamma_1\leqslant\alpha\leqslant G_1(\beta)\end{aligned}\right\} \tag{21.8}$$

此式在形式上又可以写为

$$\left.\begin{aligned}&f(\beta,\ \alpha)=\int_{F_2(\alpha)}^{\beta}\frac{\mu_V(t,\ \alpha)}{\sqrt{\beta-t}}dt\\&f(\beta,\ \alpha)=-\int_{F_1(\alpha)}^{F_2(\alpha)}\frac{\lambda(\alpha,\ t)dt}{\sqrt{\beta-t}}+\frac{1}{\pi}\int_{\beta+\gamma_1}^{\alpha}\frac{\varphi_1'(s-\beta)ds}{\sqrt{\alpha-s}},\end{aligned}\right\} \tag{21.9}$$

再用(21.7)，由(21.9)可以得到

$$\mu_V(\beta,\alpha)=\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial\beta}\int_{F_2(\alpha)}^{\beta}\frac{f(\xi,\ \alpha)d\xi}{\sqrt{\beta-\xi}}=\mu_{V_1}+\mu_{V_2}, \tag{21.10}$$

在这里

$$\left.\begin{aligned}&\mu_{V_1}=-\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial\beta}\int_{F_2(\alpha)}^{\beta}\frac{d\xi}{\sqrt{\beta-\xi}}\int_{F_1(\alpha)}^{F_2(\alpha)}\frac{\lambda(\alpha,\ t)dt}{\sqrt{\xi-t}},\\&\mu_{V_2}=\frac{1}{\pi^2}\frac{\partial}{\partial\beta}\int_{F_2(\alpha)}^{\beta}\frac{d\xi}{\sqrt{\beta-\xi}}\int_{\xi+\gamma_1}^{\alpha}\frac{\varphi_1'(s-\xi)ds}{\sqrt{\alpha-s}},\end{aligned}\right\} \tag{21.11}$$

---

[1] Whittaker & Watson: Modern Analysis, 第 XI 章。

变更 μ_{V_1} 的积分顺序，

$$\mu_{V_1}=-\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial\beta}\int_{F_1(\alpha)}^{F_2(\alpha)}\lambda(\alpha,\ t)\,dt\int_{F_2(\alpha)}^{\beta}\frac{d\xi}{\sqrt{\beta-\xi}\sqrt{\xi-t}}$$

$$=-\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial\beta}\int_{F_1(\alpha)}^{F_2(\alpha)}\lambda(\alpha,\ t)\tan^{-1}\sqrt{\frac{\beta-F_2(\alpha)}{F_2(\alpha)-t}}\,dt$$

$$=-\frac{1}{\pi\sqrt{\beta-F_2(\alpha)}}\int_{F_1(\alpha)}^{F_2(\alpha)}\frac{\lambda(\alpha,\ t)\sqrt{F_2(\alpha)-t}}{\beta-t}\,dt\,,$$

于是(21.10)可以改写为

$$\mu_V(\alpha,\beta)=-\frac{1}{\pi\sqrt{\beta-F_2(\alpha)}}\int_{F_1(\alpha)}^{F_2(\alpha)}\frac{\lambda(\alpha,\ t)\sqrt{F_2(\alpha)-t}}{\beta-t}\,dt$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\frac{\partial}{\partial\beta}\int_{F_1(\alpha)}^{\beta}\frac{d\xi}{\sqrt{\beta-\xi}}\int_{\xi+\gamma_1}^{\alpha}\frac{\varphi_1'(s-\xi)}{\sqrt{\alpha-s}}\,ds. \qquad (21.12)$$

在所考虑的机翼的亚声速后缘有 $\beta=F_2(\alpha)$，所以在这里 (21.12) 的右边第一项变成无穷大。但对于实际的流动根据 Kutta 条件，在亚声速后缘速度（从而 μ_V 也是）非为有限不可。这个事实意味着当 $\beta\to F_2(\alpha)$ 时，右边第二项也有奇性，而第一项与第二项的奇性互相抵消，μ_V 取有限值。

令設
$$H_1(z)=\frac{1}{\pi}\int_{\gamma_1}^{z}\frac{\varphi_1'(\xi)\,d\xi}{\sqrt{z-\xi}}, \qquad (21.13)$$

则(21.12)的右边第二项变为

$$\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial\beta}\int_{F_2(\alpha)}^{\beta}\frac{H_1(\alpha-\xi)}{\sqrt{\beta-\xi}}\,d\xi$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial\beta}\left[2H_1(\alpha-F_2)\sqrt{\beta-F_2}-2\int_{F_2}^{\beta}H_1'(\alpha-\xi)\sqrt{\beta-\xi}\,d\xi\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{H_1\{\alpha-F_2(\alpha)\}}{\sqrt{\beta-F_2(\alpha)}}-\int_{F_2(\alpha)}^{\beta}\frac{H_1'(\alpha-\xi)}{\sqrt{\beta-\xi}}\,d\xi\right],$$

当 $\beta\to F_2(\alpha)$ 时第二项为 0，所以

$$\lim_{\beta\to F_2(\alpha)}\mu_V(\alpha,\ \beta)=\lim_{\beta\to F_2(\alpha)}\frac{1}{\pi\sqrt{\beta-F_2(\alpha)}}\left[H_1\{\alpha-F_2(\alpha)\}\right.$$

$$\left.-\int_{F_1(\alpha)}^{F_2(\alpha)}\frac{\lambda(\alpha,\ t)\,dt}{\sqrt{F_2(\alpha)-t}}\right].$$

于是当 $\beta=F_2(\alpha)$ 时，为了使 $\mu_V\neq\infty$，必有

$$H_1\{\alpha-F_2(\alpha)\}=\int_{F_1(\alpha)}^{F_2(\alpha)}\frac{\lambda(\alpha,\ t)dt}{\sqrt{F_2(\alpha)-t}},\qquad(21.14)$$

由此式可将 H_1 用已知函数 λ 表出。利用 (21.13)和(21.14)改写 (21.12)，得

$$\mu_V(\alpha,\ \beta)=\frac{\sqrt{\beta-F_2(\alpha)}}{\pi}\int_{F_1(\alpha)}^{F_2(\alpha)}\frac{\lambda(\alpha,\ t)dt}{(\beta-t)\sqrt{F_2(\alpha)-t}}$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_{F_2(\alpha)}^{\beta}\frac{H_1'(\alpha-\xi)}{\sqrt{\beta-\xi}}d\xi,\qquad(21.15)$$

即 μ_V 可用已知函数的积分表出。施行极限运算 $\beta\to F_2(\alpha)$时，可以証明在对于 λ 的若干限制下，在亚声速后緣上必有 $\mu=\lambda$。

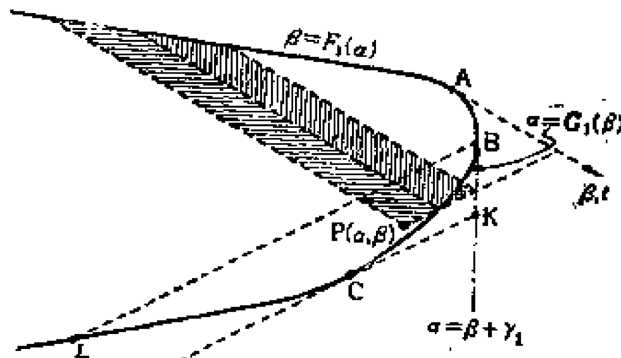


图　21.3

最后，求受有翼端影响的翼面上的势函数 φ。在图 21.3 里，代替 BC 而考虑假想翼端 BKC，则由 (20.8) 可得 BCL 上一点 $P(\alpha,\ \beta)$ 的扰动势 φ，其积分范围是图的阴影部分。如图所示，这个范圍被从 P 点发出的 Mach 綫，与实际翼端 BC 的交点所作的另一条 Mach 綫分为上下两部分，而且上面的区域可以分成翼面及翼面外(区域 T_V)两部分。考虑到这一点，由(20.8)可得

$$\varphi(\alpha,\ \beta,\ +0)=\int_{G_1(\beta)}^{\alpha}\frac{ds}{\sqrt{\alpha-s}}\int_{F_1(s)}^{\beta}\frac{\lambda(s,\ t)dt}{\sqrt{\beta-t}}$$
$$+\int_{\beta+\gamma_1}^{G_1(\beta)}\frac{ds}{\sqrt{\alpha-s}}\left[\int_{F_2(s)}^{\beta}\frac{\mu_V(s,\ t)dt}{\sqrt{\beta-t}}\right.$$
$$\left.+\int_{F_1(s)}^{F_2(s)}\frac{\lambda(s,\ t)dt}{\sqrt{\beta-t}}\right],$$

由(21.8)有

$$\int_{F_1(s)}^{\beta}\frac{\mu_{\nabla}(s,\ t)dt}{\sqrt{\beta-t}}+\int_{F_1(s)}^{F_2(s)}\frac{\lambda(s,\ t)dt}{\sqrt{\beta-t}}$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{\beta+\gamma_1}^{s}\frac{\varphi_1'(\eta-\beta)}{\sqrt{s-\eta}}d\eta=\frac{1}{\pi}\int_{\gamma_1}^{s-\beta}\frac{\varphi_1'(\eta-\beta)d(\eta-\beta)}{\sqrt{(s-\beta)-(\eta-\beta)}}$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{\gamma_1}^{s-\beta}\frac{\varphi_1'(\xi)d\xi}{\sqrt{(s-\beta)-\xi}}=H_1(s-\beta),$$

最后的結果是由(21.13)推出的。所以在 LBC 上的势函数为

$$\left.\begin{aligned}\varphi(\alpha,\ \beta,\ +0)=&\int_{G_1(\beta)}^{\alpha}\frac{ds}{\sqrt{\alpha-s}}\int_{F_1(s)}^{\beta}\frac{\lambda(s,\ t)dt}{\sqrt{\beta-t}}\\&+\int_{\beta+\gamma_1}^{G_1(\beta)}\frac{H_1(s-\beta)ds}{\sqrt{\alpha-s}},\\H_1[\alpha-F_2(\alpha)]=&\int_{F_1(\alpha)}^{F_2(\alpha)}\frac{\lambda(\alpha,\ t)}{\sqrt{F_2(\alpha)-t}}dt,\end{aligned}\right\}\quad(21.16)$$

此式右边都是用翼面梯度所决定的已知函数的积分。

(21.8)及(21.16)里所处理的机翼,若无弯度及橈度而为平板机翼时,則因 $\lambda=$常数,所以計算就比較簡单些。又(21.16)是对于所考虑的点仅受到一个翼端的影响时的解。对于受到两个翼端影响的点虽然也可同样处理,但計算頗長,故从略❶。

---

❶ 可參考校后記中所附參考文献[6]。——校者注

第7章　超声速錐型流理論及其在机翼理論上的应用

§22 錐型流理論

自一点所作的所有半射綫上，流动的物理量(压力、密度、速度分量等)都保持一定的流动叫作錐型流(conical flow)。在略去粘性及热傳导，且边界条件內不含有特征长度的情形下，这样的流动可得以实現。可以举下述情形作为一个例子，如图22.1所示，

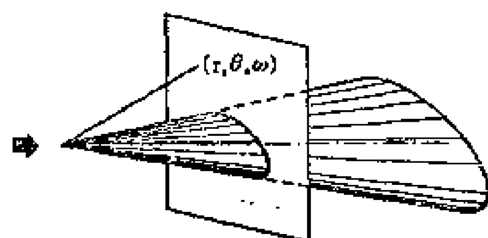


图22.1 錐型流

半无限延展的圓錐体以零攻角处在理想气体的超声速流里，此时由物体所产生的扰动不能达到由物体頂点发出的激波的前方。在半无限延展的圓錐体情形里，激波也同样作圓錐状的扩展❶。所以在激波及物体表面上的边界条件都滿足錐型流的条件，而且又无作为特征长度的量，所以这个圓錐体周圍的流动是錐型流。而且这样的流动又是軸对称的，激波的强度到处不变，所以其后的流动就变成势流。

在一般錐型流中，取以其頂点作为原点的球面坐标系(r,θ,ω)，令其各方向的速度分量为u, v, w，則有

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{\partial p}{\partial r}=\frac{\partial \rho}{\partial r}=0.$$

❶ 这只有在圓錐体的頂角不超过一定的限度才能实現，否則，会出現脫体的激波而使流动不再是錐型的。——校者注

利用这个条件由运动方程，連續方程和能量方程可导出如下关系：

$$u\left(2-\frac{v^2+w^2}{a^2}\right)+v\cot\theta+\frac{\partial v}{\partial\theta}\left(1-\frac{v^2}{a^2}\right)$$
$$+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial\omega}\left(1-\frac{w^2}{a^2}\right)-\frac{wv}{a^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v}{\partial\omega}+\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)=0.$$

如同上述圓錐体的情形一样，流动有势时，則錐型流的势函数 φ 为

$$\varphi=rF(\theta,\ \omega) \tag{22.1}$$

$$u=F,\quad v=\frac{\partial F}{\partial\theta},\quad w=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F}{\partial\omega},$$

将这些式子代入上式内，則得关于 F 的方程如下：

$$\left(2-\frac{v^2+w^2}{a^2}\right)F+\left(1+\frac{w^2}{a^2}\right)\cot\theta\frac{\partial F}{\partial\theta}+\left(1-\frac{v^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2F}{\partial\theta^2}$$
$$+\frac{1}{\sin^2\theta}\left(1-\frac{w^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2F}{\partial\omega^2}-\frac{1}{\sin\theta}\frac{2vw}{a^2}\frac{\partial^2F}{\partial\theta\partial\omega}=0. \tag{22.2}$$

錐型流看来好象是非常特殊的一种流动，但在超声速流的問題上却应用頗广，特别是綫性化錐型流理論，在超声速机翼的理論里提供了很有力的方法。

§23 超声速二維錐型流理論，Prandtl-Meyer 流

在二維超声速流里，設极坐标为 $(r,\ \psi)$，各方向的速度分量为 $(u,\ v)$，則运动方程可写为

$$\left.\begin{aligned}u\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial u}{\partial\psi}-\frac{v^2}{r}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r},\\ u\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial v}{\partial\psi}+\frac{uv}{r}&=-\frac{1}{\rho}\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\psi},\end{aligned}\right\} \tag{23.1}$$

連續方程为

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\rho u)+\frac{\partial}{\partial\psi}(\rho v)=0. \tag{23.2}$$

若假定为錐型流，則在上列各式里对 r 的导数皆为零。所以由第

一式有

$$du/d\psi=v, \tag{23.3}$$

于是由第二和第三式得到

$$\left(\frac{dv}{d\psi}+v\right)\left(1-\frac{v^2}{a^2}\right)=0,$$

然而由第二式有

$$\left(\frac{dv}{d\psi}+u\right)v=-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\psi},$$

故若設 $dp/d\psi\neq 0$，則有

$$1-v^2/a^2=0,\quad 或\quad v=a. \tag{23.4}$$

这个事实意味着自原点引出的半射綫恒与 Mach 綫一致。

将(23.4)代入到 Bernoulli 方程(3.8)里，得到

$$\frac{1}{2}(u^2+v^2)+\frac{a^2}{\gamma-1}=\frac{1}{2}\left(u^2+\frac{\gamma+1}{\gamma-1}v^2\right)=\frac{1}{2}c^2, \tag{23.5}$$

这里 c 是最大速度。将此代入(23.3)里，得到

$$\left(\frac{du}{d\psi}\right)^2=\frac{\gamma-1}{\gamma+1}(c^2-u^2).$$

在初始条件：$\psi=0$ 时 $u=0$ 下，积分此式，得到

$$u=c\sin\lambda\psi,\qquad \lambda=\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}, \tag{23.6}$$

将(23.6)代入(23.3)，可以求出 v

$$v=\lambda c\cos\lambda\psi. \tag{23.7}$$

于是在 $\psi=\pi/(2\lambda)=130.45°+(\pi/2)$ 时 $(\gamma=1.4)$，$u=c$，$v=0$。总速度 q 是

$$q^2=u^2+v^2=c^2\left[1-\frac{1}{\gamma+1}(1+\cos 2\lambda\psi)\right]. \tag{23.8}$$

自原点引出的半射綫和 Mach 綫一致，所以令 Mach 角为 μ 时，則有

$$v/u=\tan\mu, \tag{23.9}$$

以 $\psi=0$（即 $u=0$, $\mu=\pi/2$）的流綫方向作基准則其它流綫的傾斜角 θ 为

$$\theta=\mu+\psi-(\pi/2). \tag{23.10}$$

由(23.9)流綫的微分方程为

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\psi}=\cot\mu=\frac{1}{\lambda}\tan\lambda\psi.$$

积分此式，則得到流綫的表达式为

$$r=r_0\left[\frac{\cos\lambda\psi_0}{\cos\lambda\psi}\right]^{1/\lambda^2}, \tag{23.11}$$

标数 0 表示初始值。

将以上計算結果应用于实际的流动时，則可以解釋如下：如图 23.1 所示，設有沿着角 AOB 的一边 AO 且 Mach 数为 1 的均匀声速流。在超声速流动里由角 O 所产生的扰动不能傳播到自 O 发出的最初的 Mach 綫的上游。而在图 23.1 的声速流里，这个 Mach 綫变成垂直于 AO 的半射綫 OC，所以流动直到 OC 之前是均匀的，由此以后的流动才受到角 O 的影响。与 OC 夹角为 ψ 的半射綫 OR 上的流动状态的值是取自上述(23.6)到(23.11)的值。流綫的方向 θ 是由半徑 AO 沿着和 ψ 同方向測定。这样就由 (23.11) 可知流綫是向外凸的，于是可証明 $\theta>0$。由(23.8)可知，ψ 愈增加，q 也愈变大，从而压力降低。所以这个流动是圍繞角的膨脹流动。

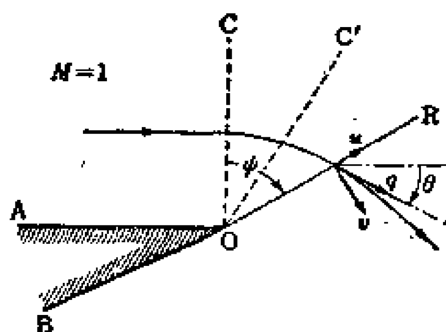


图 23.1 繞流角的声速流

其次如图 23.2 所示，考虑沿着角 AOB 的一边 AO，Mach 数 $M_0(>1)$ 的超声速流流动的情形。此时流动的变化由和 AO 成 Mach 角 $\mu_0=\sin^{-1}\dfrac{1}{M_0}$ 的初始 Mach 綫 OC' 开始，自此以下下游流动状态只是初始条件不同，其他可以和声速流的情形完全同样

求出，現在自适当的基准綫开始測量 ψ，使在 OC' 上的值 ψ_0 恰好滿足(23.8)。此时(23.8)的 q/c 是 Mach 数的函数，所以只要給出 M_0 时就可以决定 ψ_0。这样取 ψ_0 以后，則自 OC' 以下下游的流动，可以用和上述声速流的情形完全同样的式子表示。这个事实意味着在图 23.1 的声速流的膨脹里，若取 Mach 数等于 M_0 的那条半射綫 OC' 时，則自此以下下游的流动和在图 23.2 內自 OC' 以下下游的流动完全等同。于是若作出以 ψ 为参数的声速流的图表时，用它就可以計算繞流任意角的超声速流动了。

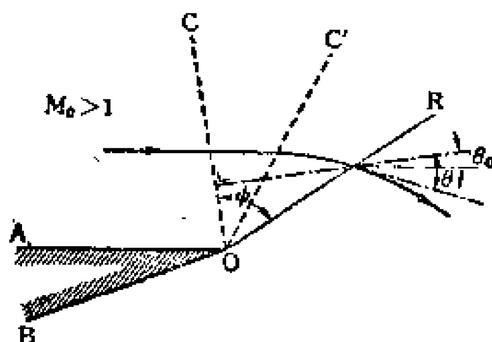


图 23.2　繞流角的超声速流

(23.10) 所給出的 θ 是 ψ 的单調遞增函数，当 ψ 最大时 $(=\pi/(2\lambda))$，取到最大值 $(\pi/2)[(1/\lambda)-1]$。在 $\gamma=1.4$ 时 $\theta_{max}=130.45°$，此时有 $\mu=0$，$M=\infty$。这是繞流角的声速流膨脹到眞空时的值。如图 23.2，当沿着 AO 流动的 Mach 数 M_0 大于 1 时，在 OC' 上有 $\theta=\theta_0$ [由 (23.8)及(23.10) 所决定]，所以必須注意，在任意半射綫上的流綫的傾斜角（自 AO 开始測量的角）不是 θ 而是 $\theta-\theta_0$。象以上这种繞流角的超声速流动叫作 Prandtl–Meyer 流❶。

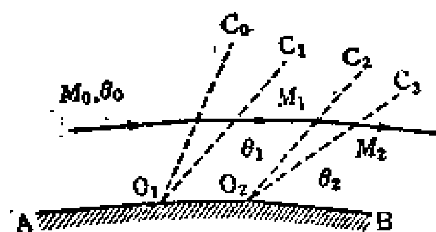


图 23.3　折綫壁上的超声速流

其次如图 23.3 所示，考慮流經具有两个角 O_1 及 O_2 的壁上的超声速流。以 Mach 数为 M_0 流經第一个角 O_1 的超声速流，在二个 Mach 綫 O_1C_0，O_1C_1 所包圍的扇状区

---

❶ Prandtl-Meyer 气流一般是指这样的超声速流动：它有一条特征綫为直綫，在其上流动参数保持不变。这里所叙述的只不过是它的特殊情形。——校者注

城內作 Prandtl-Meyer 膨脹后变为 Mach 数为 M_1 的均匀超声速流，沿着壁 O_1O_2 流动，在角 O_2 再进行膨脹，变为 Mach 数 M_2 的超声速流。对于 Mach 数 M_0, M_1, M_2 由 (23.8), (23.10) 可以决定和它們对应的 θ 值 θ_0, θ_1, θ_2。而且

$$\theta_1-\theta_0=\pi-\angle AO_1O_2,$$

$$\theta_2-\theta_1=\pi-\angle O_1O_2B,$$

所以有

$$\theta_1(M_1)=\theta_0+\pi-\angle AO_1O_2,$$

$$\theta_2(M_2)=\theta_0+2\pi-\angle AO_1O_2-\angle O_1O_2B,$$

給出 M_0 时就可以决定 θ_0，于是由这些式子可以决定 θ_1, θ_2，更可以求得 M_1, M_2。

在上例中，卽使在 O_1, O_2 的壁上角度变化是无穷小时也无妨。因此，上述方法可用来計算沿着对于流动向外凸的曲面壁的超声速流。此时用无数个折綫代替曲面，对于其中每一个角都看作可以应用 Prandtl-Meyer 流就可以了。設流入的均匀超声速流的 Mach 数为 M_0，与此对应的 θ 值为 θ_0，曲面上任一点的切綫和均匀来流所夹的角为 ω，則在該点流动的 θ 值为 $\theta+\omega$。这样將 θ 决定后，由已求得的 Prandtl-Meyer 流的关系就可决定該点的 Mach 数和其他各个量。卽是，在二維超声速势流的情形給出来流的 Mach 数和流綫的傾斜度时，在該点流动的所有性质就都可以决定，而分析就变得非常簡单。

§24 超声速綫性錐型流理論

錐型势流的基本方程 (22.2) 是非綫性的，作严格的数学处理有很多困难。若設严格意义上的錐型流存在时，在小扰动情形当然可以考虑到綫性化的問題。綫性錐型流理論是由 Busemann 最

初提出的❶，其后經过很多人的研究才发展起来，而且在超声速机翼理論上得到非常广泛的应用。

首先取 x_3 軸平行于来流(速度 w_∞)，且 x_1 軸及 x_2 軸为和它正交的正交坐标系。扰动势 φ 的綫性微分方程(11.3)此时可写成下列形式：

$$\varphi_{x_1x_1}+\varphi_{x_2x_2}-m^2\varphi_{x_3x_3}=0,\quad m^2=M^2-1, \qquad (24.1)$$

这里仅考虑超声速的情形，所以 m 是实数。

对 (24.1) 中 x_1, x_2, x_3 求导数，得到 $u=\varphi_{x_1}$, $v=\varphi_{x_2}$, $w=\varphi_{x_3}$ 的微分方程，且其形式和 (24.1) 完全相同。今若設函数 g 表示扰动速度分量 u, v, w 中的某一个时，則关于 g 的微分方程可写为

$$g_{x_1x_1}+g_{x_2x_2}-m^2g_{x_3x_3}=0. \qquad (24.2)$$

将亚声速綫性理論里所用过的 Prandtl-Glauert 变换应用于 (24.2)。即

$$x_1=m\xi_1,\quad x_2=m\xi_2,\quad x_3=\xi_3.$$

根据这个变换，(24.2)变为如下簡单的波动方程：

$$g_{\xi_1\xi_1}+g_{\xi_2\xi_2}-g_{\xi_3\xi_3}=0, \qquad (24.3)$$

(24.3)却是在 $\xi_1\xi_2\xi_3$ 空間里 $M=\sqrt{2}$ 的超声速流的綫性方程。这样，当 M 取任意值时的方程，由上述变换恒可变成 $M=\sqrt{2}$ 的情形。所以今后为了方便，仅考虑 $m^2=1$ 的情形。在这个变换下，对于边界条件的修正可以和 Prandtl-Glauert 法則的情形作完全同样的处理。

$M=\sqrt{2}$ 时的綫性微分方程为

$$g_{x_1x_1}+g_{x_2x_2}-g_{x_3x_3}=0. \qquad (24.4)$$

此时若考虑变换到如下的圓柱坐标：

$$\theta=\tan^{-1}(x_2/x_1),\quad r=\sqrt{x_1^2+x_2^2},\quad x_3=x_3, \qquad (24.5)$$

❶ Busemann: Lufo. 12 (1935), 210.

本节的記述主要根据 Lagerstrom: NACA TN 1685 (1950).

在錐型流的情况下三个独立变量 x_1, x_2, x_3 减少到两个，即 θ 和 r/x。此时 g 具有下列性质：

$$g(cx_1,\ cx_2,\ cx_3)=g(x_1,\ x_2,\ x_3),\quad c=\text{常数}。\tag{24.6}$$

若某一函数 f 对于 t 及 h 的任意值满足条件

$$f(tx,\ ty,\ tz,\ \cdots)=t^h f(x,\ y,\ z,\ \cdots),$$

等式两边各对 t 求导，再設 $t=1$，則得到

$$xf_x+yf_y+zf_z+\cdots=hf(x,\ y,\ z,\ \cdots)。$$

所以設 $f=g$，$h=0$，則有

$$x_1g_{x_1}+x_2g_{x_2}+x_3g_{x_3}=0,$$

由此得到

$$x_3g_{x_3}=-(x_1g_{x_1}+x_2g_{x_2})=-\sum_{1,2}(x_ig_\theta\theta_{x_i}+x_ig_rr_{x_i}),$$

利用(24.5)作計算，得

$$x_3g_{x_3}=-rg_r。$$

$x_3g_{x_3}$ 也滿足关系(24.6)，重复同样計算可以得到如下的結果：

$$x_3(x_3g_{x_3})_{x_3}=-r(-rg_r)_r,$$

所以 $$x_3^2g_{x_3x_3}=x_3(x_3g_{x_3})_{x_3}-x_3g_{x_3}=r(rg_r)_r+rg_r。$$

在錐型流的情形，若求得垂直于 x_3 軸的一个平面上的解时，則全空間里的解也就立即可以决定。所以在此只須設 $x_3=1$ 就够了。于是由上式可将 $g_{x_3x_3}$ 用 r 及 g_r 表示出来。(24.4) 的最初两項是二維 Laplace 算子，所以变到 r, θ 时可写成

$$g_{x_1x_1}+g_{x_2x_2}=\frac{1}{r}(rg_r)_r+\frac{1}{r^2}g_{\theta\theta}。$$

由以上两式当 $x_3=1$ 时，(24.4) 可以变为如下形式：

$$\left(\frac{1}{r}-r\right)(rg_r)_r-rg_r+\frac{1}{r^2}g_{\theta\theta}=0,\tag{24.7}$$

这个方程是綫性化錐型流在 $x_3=1$ 时的方程。此时物体的形状必須是以原点为頂点的錐体。在此考慮 $M=\sqrt{2}$ 的情形，由頂点发出的 Mach 波（仅它的下游受扰动）是圓錐状的，其半頂角等于

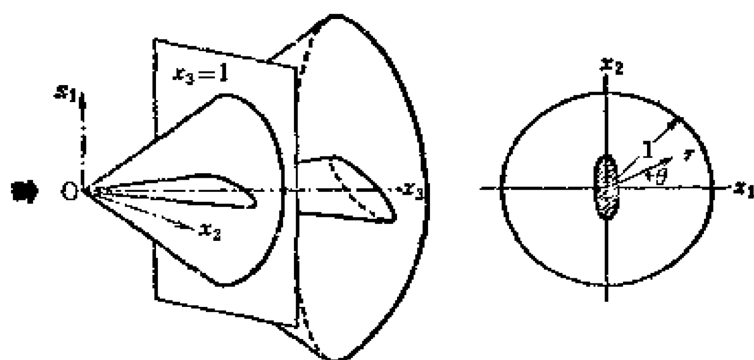


图　24.1

($\pi/4$)，这个 Mach 波和 $x_3=1$ 平面的交点的軌迹是半徑为 1 的圓(图 24.1)。这个圓叫作单位圓。用(24.7)作計算时，容易知道，这个方程在单位圓外面是双曲型的，在里面是橢圓型的。而且(24.7)用如下的变换，可按照 $r>1$ 或 $r<1$ 变为最簡单的波动方程或 Laplace 方程：

(1) $r\geqslant 1$ 时：

$$\left.\begin{array}{ll}\text{变换：} & \sigma=\cos^{-1}(1/r),\ \theta=\theta \\ \text{微分方程：} & g_{\sigma\sigma}=g_{\theta\theta}.\end{array}\right\} \tag{24.8}$$

(2) $0\leqslant r\leqslant 1$ 时：

$$\left.\begin{array}{ll}\text{变换：} & s=-\cosh^{-1}\dfrac{1}{r}=\log\dfrac{1-\sqrt{1-r^2}}{r},\ \theta=\theta \\ \text{微分方程：} & g_{ss}+g_{\theta\theta}=0.\end{array}\right\} \tag{24.9}$$

在实际应用时，$r\geqslant 1$ 区域里的解能够用其他超声速綫性理論比較簡单地求出，所以不成問題。在单位圓内部的区域里錐型流理論才显示出它眞正的威力。今后专門考虑上述(2)的情形。

在单位圓内部 g 滿足关于 s 及 θ 的 Laplace 方程，所以 $g=g(s+i\theta)$。今若設

$$\left.\begin{array}{l}\zeta=x_1+ix_2=re^{i\theta}, \\ \varepsilon=x+iy=e^{s+i\theta}=Re^{i\theta}, \\ R=e^s=\dfrac{1-\sqrt{1-r^2}}{r}\equiv Ts(r),\end{array}\right\} \tag{24.10}$$

則 g 是 ε 的函数。$R=Ts(r)$ 叫作 Чаплыгин 变換。ζ 平面及 ε 平面都是垂直于 x_3 軸(来流方向)的平面。两平面間的映射关系是 θ 不变，原点和单位圓是一致的，而单位圓的内部恒有 $r>R$. 根据以上的論述知道了，g (从而速度分量 u, v, w) 是滿足关于 (s, θ) 及 (x, y) 的 Laplace 方程的。所以 u, v, w, 每一个都可以表示为复变数 ε 的解析函数的实部。今若設 U, V, W 是 ε 的解析函数，且令

$$U=u+iu^*, \quad V=v+iv^*, \quad W=w+iw^*, \tag{24.11}$$

則 u^*, v^*, w^* 各为 u, v, w 的共軛函数，它們必滿足如下的 Cauchy-Riemann 方程

$$u_y^*=u_x, \quad u_x^*=-u_y; \quad \cdots, \tag{24.12}$$

所以即使給出 u, v, w; u^*, v^*, w^* 的常数仍然是未定的。

在实际的速度分量 u, v, w 之間有連續条件及无旋条件成立，所以它們是互相有联系的。于是上面定义的复速度分量 U, V, W 也应該不是互相独立的，其間存在着某些关系式，这叫作协調关系式(compatibility relations)。Busemann[1] 最初发現的协調关系式为

$$d(u+iv)=-\frac{1}{2}\left(\frac{d\overline{W}}{\bar{\varepsilon}}+\varepsilon dW\right), \tag{24.13}$$

其証明由 Lagerstrom[2] 作出，这里从略。Stewart 将 (24.13) 改写成下面的簡便形式[3]。首先取(24.13)的共軛函数

$$d(u-iv)=-\frac{1}{2}\left(\frac{dW}{\varepsilon}+\bar{\varepsilon}d\overline{W}\right), \tag{24.14}$$

上面两式相加，得

$$2du=-(1/2)\left[(\varepsilon+1/\varepsilon)dW+(\bar{\varepsilon}+1/\bar{\varepsilon})d\overline{W}\right]=dU+d\overline{U},$$

于是

---

[1][2] 見第 90 頁注。

[3] Stewart: Quart. Appl. Math., 4 (1946), 246.

$$\frac{dU}{d\varepsilon}=-\frac{1}{2}\left(\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\right)\frac{dW}{d\varepsilon}. \tag{24.15}$$

同样，由(24.13)及(24.14)的差得到

$$\frac{dV}{d\varepsilon}=\frac{i}{2}\left(\varepsilon-\frac{1}{\varepsilon}\right)\frac{dW}{d\varepsilon}. \tag{24.16}$$

利用(24.15)及(24.16)，若給出 U, V, W 中的任何一个时，则其余两个除去常数外可以完全决定。常数的实部在均匀来流中，由条件 $u=v=w=0$ 可以决定，但虛部却是完全任意的。

§25 綫性錐型流理論在超声速机翼理論上的应用

如果机翼的平面形状是被限制在由一点发出的两条半射綫所包圍的区域里，且在其頂点所引的半射綫上翼面梯度都相同，则对于其周圍的超声速流可以应用錐型流理論。首先考虑具有超声速前緣和側緣的对称机翼无攻角地处在 x_1x_3 平面上的情形，如图25.1所示。設翼面在 x_3 方向的梯度在上表面是 $+\lambda$，在下表面是 $-\lambda$，来流 Mach 数是 $\sqrt{2}$. 图25.2表示出在 $x_3=1$ 的截面上的翼面和扰动区域。OH 是翼面，圓 $ABEC$ 是自前緣和側緣的交点发出的 Mach 錐的截面，其半徑等于1. BF, CG 是由前緣发出的平面 Mach 波的截面，各在 B 和 C 与单位圓相切。若令前緣的后

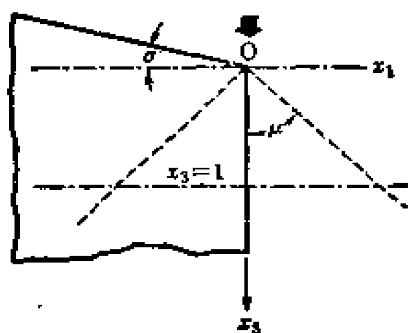


图 25.1

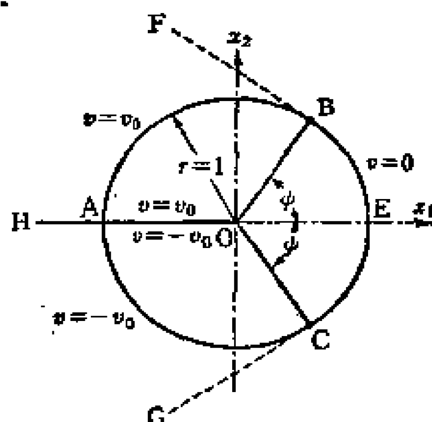


图 25.2

掠角是 σ，$\angle EOB=\angle EOC=\psi$，則由图形中簡单的几何关系可以証明，

$$\cos\psi=\tan\sigma. \tag{25.1}$$

在这个截面上，$FBECG$ 的外部是非扰动区域。即使在其内部单位圓的外面也是側緣所影响不到的部分，如在 §17 所述，在該处的流动是二維的。即是在区域 $FBAH$，$GCAH$ 的 u，v，w 的值各可設为 u_0，v_0，w_0；u_0，$-v_0$，w_0. 这些值用 §17 的方法可以計算如下：

$$u_0=\frac{\lambda w_\infty \tan\sigma}{\sqrt{1-\tan^2\sigma}},\quad v_0=\lambda w_\infty,\quad w_0=\frac{-\lambda w_\infty}{\sqrt{1-\tan^2\sigma}}, \tag{25.2}$$

这里 w_∞ 是来流的速度。于是只要求出单位圓内部的流动，問題就解决了。

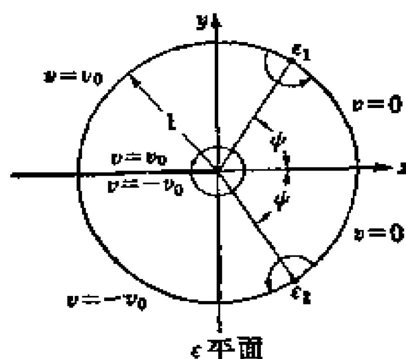


图 25.3

图 25.3 是将图 25.2 映射在 ε 平面上，ε_1，ε_2 分别为 B，C 在 ε 平面上的对应点。ε 平面上的边界条件取图上所标出的值。由此图可知，边界上有三个奇点：原点，ε_1 和 ε_2，按照它們的奇性可以决定解。首先翼面上的边界条件是可以令 $v=v_0(\theta/\pi)$ 来得到滿足的，但是，当 v 等于在原点具有对数性奇点的复函数的虛部时，这个条件也得到滿足。所以对于原点的奇性可設为

$$V=-i(v_0/\pi)\log\varepsilon.$$

同理，为了在 ε_1 及 ε_2 的奇性得到滿足，分别使用 $\log(\varepsilon-\varepsilon_1)$ 及 $\log(\varepsilon-\varepsilon_2)$ 就可以了。若考虑到各奇点的 v 的間断性，最后可将 V 表示如下：

$$V=(iv_0/\pi)[\log(\varepsilon-\varepsilon_1)(\varepsilon-\varepsilon_2)-\log\varepsilon]. \tag{25.3}$$

将(25.3)代入协調关系式(24.15)，經过一些計算后得到

$$\frac{dW}{d\varepsilon}=\frac{2v_0}{\pi}\frac{1}{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}\left[\frac{1}{\varepsilon-\varepsilon_1}-\frac{1}{\varepsilon-\varepsilon_2}\right],$$

或者利用 $\varepsilon_1-\varepsilon_2=e^{i\psi}-e^{-i\psi}=2i\sin\psi$ 积分上式，得到

$$W=\frac{iv_0}{\pi\sin\psi}\log\frac{\varepsilon-\varepsilon_2}{\varepsilon-\varepsilon_1}+c,$$

不妨将常数 c 的虚部設为 0. 利用由(25.2)导出的在单位圓上对于 $\theta>\psi$ 的条件

$$\mathrm{Re}(W)=w=w_0=-v_0/\sqrt{1-\tan^2\sigma}=-v_0/\sin\psi$$

就可以决定 c 的实部，其結果为

$$c=(w_0/\pi)(\psi+\pi).$$

因而 W 可表示为

$$\frac{\pi W}{w_0}=-i\log\frac{\varepsilon-\varepsilon_2}{\varepsilon-\varepsilon_1}+\psi+\pi. \tag{25.4}$$

同理，由协調关系式(24.14)得到

$$U=\frac{u_0}{\pi}\left[-i\log\frac{\varepsilon-\varepsilon_2}{\varepsilon-\varepsilon_1}+\psi+\pi\right]-\frac{v_0}{\pi}\log\varepsilon. \tag{25.5}$$

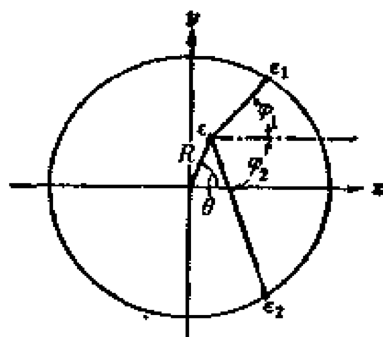


图　25.4

在 ε 平面上导入如图 25.4 所示的角 φ_1 及 φ_2，则在点 (R,θ) 的速度分量 u, v, w 可簡单表达为

$$\left.\begin{aligned}u&=(u_0/\pi)(\varphi_2-\varphi_1+\psi+\pi)-(v_0/\pi)\log R,\\ v&=(v_0/\pi)[\theta-(\varphi_1+\varphi_2)],\\ w&=(w_0/\pi)(\varphi_2-\varphi_1+\psi+\pi).\end{aligned}\right\} \tag{25.6}$$

将它們变到实平面（ζ 平面）上，設 $r\cos\theta=t$，$\cos\psi=\tan\sigma$，而求翼平面（$\theta=0$，$\pm\pi$）上的速度分量时，得結果如下：

$$\left.\begin{aligned} u&=\frac{u_0}{\pi}\cos^{-1}\frac{t-\tan\sigma}{1-t\tan\sigma}-\frac{v_0}{\pi}\log\frac{1-\sqrt{1-t^2}}{|t|},\\ v&=v_0(\theta/\pi),\\ w&=\frac{w_0}{\pi}\cos^{-1}\frac{t-\tan\sigma}{1-t\tan\sigma}. \end{aligned}\right\}\tag{25.7}$$

在上述对称机翼的情形，ζ 面上 x_1 軸上面，在翼面給出 v，在翼面外 $v=0$。另一方面在有攻角的无厚度平板机翼的情形，对于 x_1 軸，在翼面上 $v=\alpha w_\infty$（α 是攻角），但在翼面外 v 的值是未知的。所以升力問題的处理是相当复杂的。作为錐型流理論在升力問題上的应用例題，将考虑具有如图 25.5 所示那样的平面形状的无厚度平板三角机翼以攻角 α 处在超声速流（$M=\sqrt{2}$）中的情形。$x_3=1$ 的截面在 ε 平面上的映射表示在图 25.6 里。

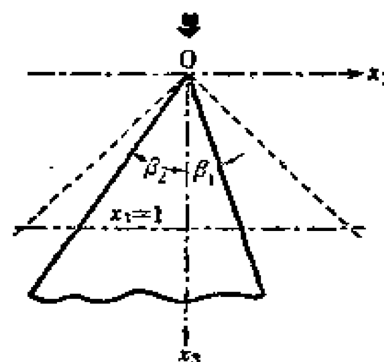


图 25.5

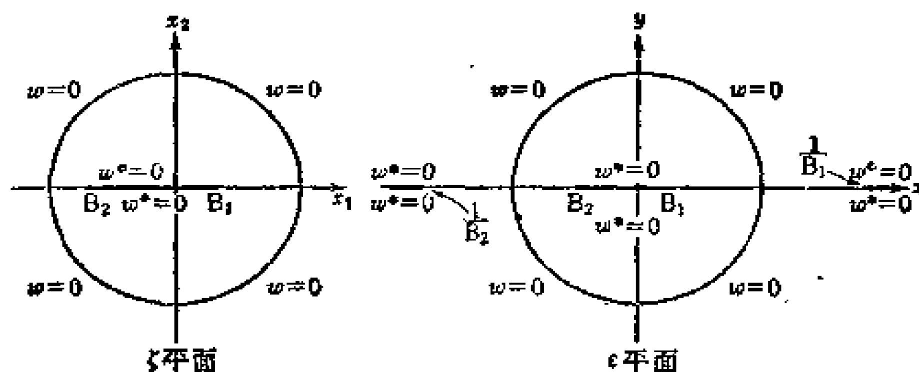


图 25.6

在翼面上有 $v=\alpha w_\infty=$ 常数，所以 $\partial v/\partial x_2=0$，从而由无旋条件有 $\dfrac{\partial w}{\partial x_2}=0$。另一方面，用 ζ 到 ε 的变换可以証明在 $x_2=0$ 的 dx_2

和在$y=0$的dy成比例，所以在ε平面的翼面上也有$\partial w/\partial y=0$。于是由Cauchy-Riemann条件得到$\partial w^*/\partial x=0$。正如Busemann所述，可以认为这个条件是意味着在平板机翼的情形翼面上$w^*=0$。于是边界条件变成如图25.6所示的，在单位圓上$w=0$，在翼面上$w^*=0$。在前面的对称机翼的情形里，边界条件是仅由v給出的，而在升力問題里却給出w与w^*混合的边値，这是値得注意的。

在图25.6内，設用B_1B_2表示翼面，B_1及B_2对于单位圓的对称点是C_1及C_2。C_1及C_2各在实軸的点$(1/B_1)$及$(1/B_2)$上。根据复变函数理論对称原理知道，为了满足在单位圓上給出的边界条件，在实軸上$1/B_1$到$+\infty$及$-\infty$到$1/B_2$的这两綫段上附加上边界条件$w^*=0$就可以了。

在实軸上$w^*=0$的条件意味着在其邻域里有$W(\bar{\varepsilon})=\overline{W}(\varepsilon)$，从而$w$对于$x$軸是对称的。但在另一方面，在实际流动的升力問題里，机翼的上下表面压力不对称，所以w也必須不对称。若考虑以B_1B_2和$(1/B_1)\infty(1/B_2)$作为連結綫的二重Riemann曲面时，就可以避免这个矛盾。在这样的二重Riemann曲面上，$W(\varepsilon)$变成只在B_1，B_2，$1/B_1$，$1/B_2$四点各有一个孤立奇点的解析函数。而这样的函数的极点和零点的个数必相同，所以設ε_n是极点时，就可知这个函数必能用ε及$\rho=\sqrt{(\varepsilon-\varepsilon_1)(\varepsilon-\varepsilon_2)\cdots(\varepsilon-\varepsilon_n)\cdots}$的有理函数表出。在我們現在的情形有

$$\rho=\sqrt{(\varepsilon-B_1)(\varepsilon-B_2)(\varepsilon-1/B_1)(\varepsilon-1/B_2)}\,.$$

首先考虑在B_2有极点在B_1有零点的解。为了满足单位圓上的条件，由对称原理，只要在$1/B_2$放置另一个极点，在$1/B_1$放置一个零点就行了。满足这个条件的ε和ρ的有理函数可写成下列形式：

$$W=k'\frac{(\varepsilon-B_1)(\varepsilon-1/B_1)}{\rho}=k'\sqrt{\frac{(\varepsilon-B_1)(\varepsilon-1/B_1)}{(\varepsilon-B_2)(\varepsilon-1/B_2)}},\quad(25.8)$$

这里 k' 是常数。在此式内若交换 B_1 和 B_2，就可以得到在 B_1 有极点在 B_2 有零点的解。于是这两个解的和就是在 B_1，B_2 都有极点的解。所以

$$W=k_1'\sqrt{\frac{(\varepsilon-B_1)(\varepsilon-1/B_1)}{(\varepsilon-B_2)(\varepsilon-1/B_2)}}+k_2'\sqrt{\frac{(\varepsilon-B_2)(\varepsilon-1/B_2)}{(\varepsilon-B_1)(\varepsilon-1/B_1)}}.$$

可以証明当 k_1' 及 k_2' 都是实数时，这个解满足所有边界条件。上式又可改写成

$$W=k_1\sqrt{\frac{-(\varepsilon-B_1)(B_1\varepsilon-1)}{(\varepsilon-B_2)(B_2\varepsilon-1)}}+k_2\sqrt{\frac{-(\varepsilon-B_2)(B_2\varepsilon-1)}{(\varepsilon-B_1)(B_1\varepsilon-1)}}. \tag{25.9}$$

在这个流动里原点 $\varepsilon=0$ 位于翼面上，所以这里的 V 必须是連續的。于是由协調关系式(24.15)得到在 $\varepsilon=0$ 时有 $dW/d\varepsilon=0$。利用这个关系可以决定(25.9)的常数比如下：

$$k_2/k_1=-B_1/B_2,$$

于是 W 可以写为

$$W=k\left[B_2\sqrt{\frac{-(\varepsilon-B_1)(B_1\varepsilon-1)}{(\varepsilon-B_2)(B_2\varepsilon-1)}}\right.$$
$$\left.-B_1\sqrt{\frac{-(\varepsilon-B_2)(B_2\varepsilon-1)}{(\varepsilon-B_1)(B_1\varepsilon-1)}}\right]. \tag{25.10}$$

将(25.10)的 W 代入协調条件(24.15)里計算 V，利用在翼面上 $v=\mathrm{Re}(V)=v_0=-\alpha w_\infty$ 的条件，就可以决定常数 k 的值。并且由 $dV/d\varepsilon$ 推导 V 时的积分，k 包含有第一类和第二类椭圓函数。

特别地在左右对称的三角机翼的情形时，可設 $B_1=-B_2\equiv B$，于是

$$W=-kB\left[\sqrt{\frac{(\varepsilon-B)(B\varepsilon-1)}{(\varepsilon+B)(B\varepsilon+1)}}+\sqrt{\frac{(\varepsilon+B)(B\varepsilon+1)}{(\varepsilon-B)(B\varepsilon-1)}}\right]$$
$$=-\frac{2kB^2(1+\varepsilon^2)}{\sqrt{(\varepsilon^2-B^2)(B^2\varepsilon^2-1)}}. \tag{25.11}$$

用 Чаплыгин 变換由 s 平面变到 ζ 平面(x_1x_2 平面)，設 $x_3=1$ 的截面上的半翼展为 b，由原点在 x_1 軸上量得的长度为 t 时，則对称三角翼面上的 w 的分布变为

$$w=k/\sqrt{1-(t/b)^2}. \tag{25.12}$$

Stewart[1] 求得 k 的値为

$$k=\frac{\alpha w_\infty b}{E(\sqrt{1-b^2})}, \tag{25.13}$$

这里 E 是第一类椭圓积分。

压力系数由 $C_p=-2w/w_\infty$ 給出，升力系数 C_L 可用翼面上 C_p 的积分求得。于是对称三角机翼的 C_L 是

$$C_L=-\frac{2}{2b}\int_{-b}^{b}\left(-2\frac{w}{w_\infty}\right)dt$$

$$=\frac{2\alpha}{E(\sqrt{1-b^2})}\int_{-b}^{b}\frac{dt}{\sqrt{1-(t/b)^2}}=\frac{2\pi\alpha b}{E(\sqrt{1-b^2})}.$$

若設后掠角是 σ，則有 $b=\cot\sigma$，所以

$$C_L=\frac{2\pi\cot\sigma}{E(\sqrt{1-\cot^2\sigma})}\alpha, \tag{25.14}$$

利用 Prandtl-Glauert 变換，由 $M=\sqrt{2}$ 变到任意 $M(>1)$ 时，得到

$$\sqrt{M^2-1}\,C_L=\frac{2\pi\sqrt{M^2-1}\cot\sigma}{E(\sqrt{1-(M^2-1)\cot^2\sigma})}\alpha. \tag{25.15}$$

[1] 見第93頁注。

第8章 跨声速理論

§26 跨声速流的特性

既含有超声速流动又含有亚声速流动的流場叫作跨声速流(transonic flow)。将可供高速时使用的薄物体或細長体放置在均匀来流中时，在流动中超声速和亚声速两部分共存的状态，只有在均匀来流的 Mach 数十分接近于 1 时才出现。所以在实用意义下，所謂跨声速流大多指来流的 Mach 数接近于 1 的高亚声速流及低超声速流而言。在对跨声速流进行数学处理之前，有必要先从現象上将它的特性加以說明。

首先，考慮将一物体放置在均匀来流里所产生的流場。設均匀来流的 Mach 数远低于 1，則流动几乎接近于不可压縮流，在物体表面上出現流速低于均匀来流流速的部分和高于均匀来流流速的部分。于是在物体表面上所产生的最大 Mach 数 M_{max} 必然大于均匀来流的 Mach 数 M_∞。在此状态里令 M_∞ 逐漸增高，在 M_∞ 达到 1 以前已有 $M_{max}=1$，在流場内开始出現等于声速的流速，这个状态叫做临界状态。此时的 M_∞ 叫做临界 Mach 数(critical Mach no.)。若将它表示为 M_C 时，則在 $1>M_\infty>M_C$ 的情形里，除在物体附近的一部分有超声速区域出现外，其余的流动都是亚声速流。通常由亚声速加速到超声速的流动是稳定的，但由超声速通过声速而减到亚声速的流动是不穩定的，差不多在所有的情形都要发生激波。图 26.1 示范地表示出翼型周圍的近声速流动的例子，其中(b)表示 $1>M_\infty>M_C$ 的状态，翼型上所产生的超声速区域的下游为翼面上所发生的激波所限制，在該处流动經受到間断的变化。

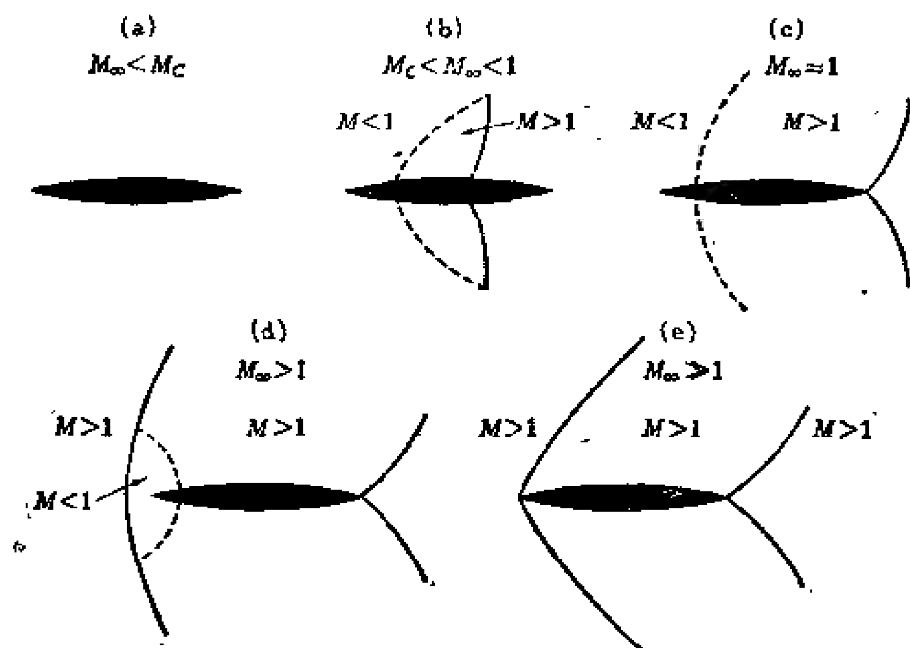


图 26.1 在跨声速区域里翼型周圍的流动

M_∞ 再接近于 1 时，超声速区域逐渐扩大，翼面上的激波逐渐往后移，直到 M_∞ 非常接近于 1 时它到达翼后緣而停止在該处。均匀来流变成超声速流时，在机翼的前方出現另外的激波，当 M_∞ 非常接近于 1 时，激波发生在离物体很远的上游，而且波面几乎和来流垂直，随着 M_∞ 离开 1 逐渐增大时，激波迅速接近于机翼，而且波面也变弯了(图 26.1 d)。若机翼的前緣圓鈍时，不管 M_∞ 有多大，这个前方激波不会附着在机翼上，而产生在机翼和激波之間包含亚声速区域的流动。若机翼前緣尖銳，且 M_∞ 的值达到这样的值：使得这时翼型的半頂角大于由激波所引起的流动的最大偏角时，前方的激波就附着在前緣上(参照 § 6)。若使 M_∞ 的值再增大，則流动中的亚声速区域完全消失而得到純超声速流(图 26.1 e)。

这样，在跨声速流中常伴有激波。象前面所說的 Ringleb 的准确解 (§ 8) 那样不伴有激波的混合流(含有亚声速超声速两种区域的流动)，在理論上的可能性，在迄今为止的几个例子里曾經看

到过，但还未得到实驗的确証。对于这种理論和实驗脫节的现象，曾有过种种有趣的討論❶，这里从略。由实践的观点看来，可以认为，跨声速流必然伴有激波。但当物体很薄又細长时，則由它所产生的扰动也可看做非常小，所以当均匀来流的 Mach 数非常接近于 1 时，可以认为，紧接激波前面的 Mach 数只比 1 稍微大一点。正如 §5 所述，在紧接激波前面的 Mach 数接近于 1 时，由于激波而产生的速度变化是一阶小量，而由激波所产生的熵变化却是三阶小量。于是在仅考虑跨声速的小扰动流动时，在全部流場内可以不考虑熵的变化，由 §3 所述，不管是否发生激波，恒可假定有速度势存在。

§27 跨声速方程

跨声速小扰动流动的正确的微分方程是由 Kármán❷推导出来的。除去 Mach 数非常接近于 1 的地方之后，如 §11 所述，二維情形的扰动势 φ 的微分方程是

$$(1-M^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0, \tag{27.1}$$

M 是来流的 Mach 数，x 軸取来流方向。在(27.1)里形式上設 $M=1$ 时，則得

$$\varphi_{yy}=0, \tag{27.2}$$

(27.2)表示扰动速度 $v=\varphi_y$ 沿垂直于来流方向是不变的。在叙述 M 接近于 1 的流动时，这个方程已經不适用了，但由此式可以预想到跨声速扰动的衰減非常不良，在离物体相当远的地方也还殘留相当大的扰动。又(27.1)在 $M<1$ 时用 §12 的 Prandtl-Glauert 变换 $\xi=x$, $\eta=y\beta$ $(\beta=\sqrt{1-M^2})$ 可变成关于 (ξ,η) 的 Laplace

❶ Sears: J. Appl. Phys., **21** (1950).

❷ Kármán: J. Math. Phys., **26** (1947), 182.

方程，其解为 $\varphi=\varphi(\xi,\ \eta)$，所以有 $u=\varphi_x=\varphi_\xi$，$v=\varphi_y=\beta\varphi_\eta$。于是当 $M\to1$，$\beta\to0$ 时有 $\varphi_x\gg\varphi_y$。(27.2) 虽不能应用于跨声速流，但此式适用范圍的上限，它的解和跨声速解的下限必須一致，所以在跨声速区域里也可以預想到有 $\varphi_x\gg\varphi_y$。

注意到以上各点，我們就可以由严格的势函数方程推导出跨声速方程。首先用(3.9)将二維势函数方程写成下列形式：

$$\left(1-\frac{u^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-2\frac{uv}{a^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^3}+\left(1-\frac{v^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=0,\qquad(27.3)$$

这里 Φ，u，v 各为流动的势函数及速度分量。且 a 是声速，由(3.8)可将 a 表示为速度的函数

$$a^2+\frac{\gamma-1}{2}(u^2+v^2)=\frac{\gamma+1}{2}a^{*2}❶,\qquad(27.4)$$

a^* 是临界速度。

其次，假定由物体所产生的扰动很小。考虑来流速度 U 接近于声速的状态，所以不妨取临界速度 a^* 为基础而考虑所产生的扰动。今将扰动势 φ 取成如下的形式：

$$\left.\begin{aligned}&\Phi=a^*x+\varphi,\\&u=a^*+\varphi_x,\ v=\varphi_y\end{aligned}\right\}\qquad(27.5)$$

在(27.5)里設 φ 是一阶小量，略去高阶小量后，有

$$\frac{u^2}{a^2}=1+\frac{\gamma+1}{a^*}\varphi_x,\quad\frac{uv}{a^2}=\frac{1}{a^*}\varphi_y,\quad\frac{v^2}{a^2}=\frac{1}{a^{*2}}(\varphi_y)^2.$$

将上式代入(27.3)，略去关于 φ 的三阶以上的量时，则得到下列方程：

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\frac{\gamma+1}{a^*}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{2}{a^*}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y},\qquad(27.6)$$

此式右边是由 φ 的二阶項組成的。但由以上所述，在跨声速区域里有 $\varphi_x\gg\varphi_y$，所以右边第二項比第一項小得多，因而可以略去，于

❶ 原书誤为 a^*. ——校者注

是跨声速方程变成如下的形式:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\frac{\gamma+1}{a^*}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \tag{27.7}$$

这个方程的边界条件是在无穷远及在物体上給出的。首先在无穷远 x 方向的速度和来流速度 U 一致，y 方向的速度必须为零，所以設 $U/a_\infty=M$ 时，則边界条件为

$$\varphi_x=U-a^*\doteq\frac{2}{\gamma+1}a^*(M-1),\quad \varphi_y=0. \tag{27.8}$$

其次，設物体的形状是

$$y=\tilde{y}(x),\quad \tilde{y}'=\tau h(x/c), \tag{27.9}$$

則由 §11 可知物体表面上的边界条件是:

$$当\ y=\pm 0\ 时,\quad \frac{1}{U}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\doteq\frac{1}{a^*}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\tau h(x/c), \tag{27.10}$$

这里 τ 是物体的厚度比，c 是物体的特征长度，$h(x/c)$ 表示物体的几何形状。

跨声速微分方程 (27.7) 虽然很簡单，但必须注意到它是非綫性的。如 §3 所述，严格的势函数方程 (27.3) 在 $u^2+v^2<a^2$ 的部分是椭圓型的，在 $u^2+v^2>a^2$ 的部分是双曲型的。在跨声速流場里出现超声速和亚声速两部分，所以若将它作为統一处理的一个微分方程时，当流动由亚声速变成超声速时这个微分方程必須具有由椭圓型变成双曲型的数学特性。(27.7) 就是这样的混合型微分方程的最簡单的情形。对 (27.7) 还需要注意的一点是它含着 γ (比热比)。普通的綫性化方程 (27.1) 里不含 γ，所以跨声速流的性质也受到气体的特性的影响。

用同一方法处理軸对称跨声速流时，得到如下的結果:

跨声速方程:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{1}{y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\gamma+1}{a^*}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y},$$

变换：
$$x = c\xi, \quad y = \frac{c}{\tau\sqrt{\Gamma}}\eta,$$

$$\varphi = ca^* \frac{(1-M)}{\Gamma} F(\xi, \eta) = ca^* \tau^2 f(\xi, \eta),$$

相似方程：
$$\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial f}{\partial \eta} = 2\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2},$$

边界条件：

在无穷远　$\dfrac{\partial f}{\partial \xi} = -K, \quad \dfrac{\partial f}{\partial \eta} = 0,$

在 $\eta = 0$　$2\eta \dfrac{\partial f}{\partial \eta} = g(\xi),$

$$K = \frac{1-M}{\tau^2 \Gamma}.$$

(27.7)是 Kármán 推导的跨声速方程，是取临界速度为基础来考虑所产生的扰动而得到的。但和普通綫性理論同样地取来流速度为基础来考虑所产生的扰动时，也可求出跨声速方程。此时的扰动势設为 φ'，則有

$$\Phi = Ux + \varphi', \tag{27.11}$$

微分方程在一般三維情形是

$$(1-M^2)\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z^2} = \frac{\gamma+1}{U} M^2 \frac{\partial \varphi'}{\partial x}\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2}, \tag{27.12}$$

此处 $M = U/a_\infty$（来流的 Mach 数）。又对于它的边界条件可写为

$$\left.\begin{aligned} &\text{在无穷远：} && \varphi'_x = \varphi'_y = \varphi'_z = 0, \\ &\text{在物体上：} && UG_x + \varphi'_y G_y + \varphi'_z G_z = 0, \end{aligned}\right\} \tag{27.13}$$

物体的形状設为 $G(x, y, z) = 0$。

(27.7)或(27.12)是非綫性方程，对它們作数学处理是非常困难的。但正如 §7 所述，准确的二維势方程 (27.3) 用速度图变换可改成綫性方程，所以在跨声速的情形速度图方程也应該是綫性的。在和(27.7)同样程度的近似范围内，跨声速速度图方程由

Guderley❶ 所求出。首先由关于流函数 Ψ 的准确的速度图方程(7.13)出发。

$$q^2\Psi_{qq}+\left(1+\frac{q^2}{a^2}\right)q\Psi_q+\left(1-\frac{q^2}{a^2}\right)\Psi_{\theta\theta}=0, \qquad (27.14)$$

这里 $q^2=u^2+v^2$, θ 是流綫和来流方向所夹的角度，又声速 a 由(27.4)給出。

和 Kármán 的情形同样，考虑到由临界速度 a^* 所产生的扰动，作如下的变换:

$$q=a^*+\varepsilon\xi, \qquad (27.15)$$

这里 ξ 是和 1 同阶的无量綱的速度，ε 是具有速度量綱的正常数，且 $a^*\gg\varepsilon$. 将此变换施用于(27.14)的左边第一項和第二項时，得到

$$q^2\Psi_{qq}=\frac{(a^*+\varepsilon\xi)^2}{\varepsilon^2}\Psi_{\xi\xi}\doteq\frac{a^{*2}}{\varepsilon^2}\Psi_{\xi\xi},$$

$$\left(1+\frac{q^2}{a^2}\right)q\Psi_q\doteq\frac{2a^*}{\varepsilon}\Psi_\xi.$$

于是(27.14)的第二項对于第一項是可以忽略的。另一方面，利用(27.4)及(27.15)可将第三項的系数变成

$$\left(1-\frac{q^2}{a^2}\right)=\frac{1}{a^2}\left[\frac{\gamma+1}{2}a^{*2}-\frac{\gamma-1}{2}q^2-q^2\right]\doteq-\frac{\gamma+1}{a^*}\varepsilon\xi.$$

所以为了使(27.14)的第三項和第一項是同阶量，就必須要使 θ 和 $(\varepsilon/a^*)^{3/2}$ 是同阶的量。按 Guderley 的方法，設

$$\theta=\sqrt{\gamma+1}\left(\frac{\varepsilon}{a^*}\right)^{3/2}\eta, \qquad (27.16)$$

就可以得到跨声速速度图方程

$$\Psi_{\xi\xi}-\xi\Psi_{\eta\eta}=0. \qquad (27.17)$$

按着 ξ 的正負，流动分别是超声速和亚声速的，(27.17)分别为双曲型及椭圓型的，它虽然是綫性的但具有混合型性质。这个微分

❶ Guderley: U. S. A. F. Rep. F—TR—2168—ND.

方程叫做 Tricomi 方程。

对应于(27.17)，由速度图平面到物理平面的变换，可用下列公式給出：

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial \xi}&=\frac{1}{\rho^* a^*}\sqrt{\gamma+1}\left(\frac{\varepsilon}{a^*}\right)^{1/2}\xi\Psi_\eta,\\
\frac{\partial x}{\partial \eta}&=\frac{1}{\rho^* a^*}\sqrt{\gamma+1}\left(\frac{\varepsilon}{a^*}\right)^{1/2}\Psi_\xi,\\
y&=\frac{1}{\rho^* a^*}\Psi.
\end{aligned}\right\}\qquad(27.18)
$$

§28 跨声速相似律

若能将 φ, x, y 适当变换后，代入到微分方程和边界条件中，而使所得的新的微分方程和边界条件里不含有流动的参数 M, τ, γ 时，則可从这个新微分方程的解得到一系列的几何形状相似的物体周圍的相似解。而且由最初的变换关系可导出相似律。

Kármán 对于(27.7)作了如下的变换

$$
\left.\begin{aligned}
&x=c\xi,\quad y=c(\tau\Gamma)^{-n}\eta,\\
&\varphi=ca^*\frac{(1-M)}{\Gamma}F(\xi,\eta),\\
&\Gamma=(\gamma+1)/2.
\end{aligned}\right\}\qquad(28.1)
$$

把这些变换代入(27.7)和边界条件(27.8)，(27.10)，則得到

$$
\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}=2(\tau\Gamma)^{-2n}(1-M)\frac{\partial F}{\partial \xi}\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}\qquad(28.2)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\text{在无穷远：}\quad \partial F/\partial\xi=-1,\quad \partial F/\partial\eta=0,\\
&\text{在 }\eta=\pm 0\text{：}\quad \partial F/\partial\eta=(\tau\Gamma)^{1-n}(1-M)^{-1}h(\xi).
\end{aligned}\right\}\qquad(28.3)
$$

为了使(28.2)及(28.3)和 M, τ, γ 无关，則

$$
\left.\begin{aligned}
K&\equiv(\tau\Gamma)^{-2n}(1-M),\\
K_1&\equiv(\tau\Gamma)^{1-n}(1-M)^{-1}
\end{aligned}\right\}\qquad(28.4)
$$

必須同时是常数。这个条件在 $n=1/3$ 时可以滿足。此时

$$K=(1-M)/(\tau\Gamma)^{2/3},\quad K_1=1/K. \tag{28.5}$$

又(28.2)和(28.3)可变成下列形式：

$$\frac{\partial^2 F}{\partial\eta^2}=2K\frac{\partial F}{\partial\xi}\frac{\partial^2 F}{\partial\xi^2}. \tag{28.6}$$

物体上的边界条件是

$$\text{在}\ \eta=\pm 0:\qquad \partial F/\partial\eta=(1/K)h(\xi), \tag{28.7}$$

設

$$f(\xi,\eta)=KF(\xi,\eta) \tag{28.8}$$

則微分方程变为

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}=2\frac{\partial f}{\partial\xi}\frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2}, \tag{28.9}$$

边界条件变为

$$\left.\begin{array}{ll}\text{在无穷远:} & \partial f/\partial\xi=-K,\quad \partial f/\partial\eta=0,\\ \text{在}\ \eta=\pm 0: & \partial f/\partial\eta=h(\xi).\end{array}\right\} \tag{28.10}$$

当 $n=1/3$ 时，(28.1)的变换变为

$$\left.\begin{array}{l}x=c\xi,\quad y=c(\tau\Gamma)^{-1/3}\eta,\\ \varphi=ca^*\dfrac{(1-M)}{\Gamma}F(\xi,\eta)=ca^*\dfrac{\tau^{2/3}}{\Gamma^{1/3}}f(\xi,\eta).\end{array}\right\} \tag{28.11}$$

如果对于某一常数 K 及某一表示形状的函数 $h(\xi)$ 能求得(28.8)到(28.10)的解 $f(\xi,\eta)$，則对該解作用(28.11)也可以求得一系列相似解，这时 M,τ,γ 也已經起了变化(但 K 和 $h(\xi)$ 都是相同的)。K 叫做跨声速参数。

此时物体表面的压力系数 C_p 可表示为

$$C_p=(u-U)\Big/\left(\frac{1}{2}\rho_\infty U^2\right).$$

将(27.5)及(28.1)代入上式，則得

$$\begin{aligned}C_p&=-\frac{2(1-M)}{\Gamma}\left(1+\frac{\partial F}{\partial\xi}\right)\\ &=-\frac{\tau^{2/3}}{\Gamma^{1/3}}\left[2\frac{1-M}{(\tau\Gamma)^{2/3}}\left(1+\frac{\partial F}{\partial\xi}\right)\right].\end{aligned}$$

对于一个已給的 $h(\xi)$，此式右边方括弧內的項是 K 与 ξ 的函数，所以可置

$$C_p = \frac{\tau^{2/3}}{\Gamma^{1/3}} P(K, \xi), \tag{28.12}$$

P 表示某一个函数。这个物体的阻力系数 C_D 为

$$C_D = \frac{1}{c}\oint C_p \frac{d\bar{y}}{dx} dx,$$

将(28.12)代入后，可得

$$C_D = \frac{\tau^{5/3}}{\Gamma^{1/3}} D(K). \tag{28.13}$$

同样，升力系数 C_L 及力矩系数 C_M 各为

$$C_L = \frac{\tau^{2/3}}{\Gamma^{1/3}} L(K), \quad C_M = \frac{\tau^{2/3}}{\Gamma^{1/3}} N(K), \tag{28.14}$$

D, L, N 都仅为 K 的函数。

对于軸对称流也作同样的分析，可得

跨声速参数：

$$K = \frac{1-M}{\tau^2 \Gamma}, \quad C_p = \tau^2 P(K, \xi), \quad C_D = \tau^2 D(K). \tag{28.15}$$

Spreiter[1] 将上述 Kármán 的理論推广到具有有限展弦比的三維机翼的情形。此时跨声速参数除(28.5)的 K 以外，还有包含展弦比 A 的参数。

三維机翼的跨声速参数：

$$K = \frac{M^2-1}{(\tau\Gamma)^{2/3}}, \quad H = (\tau\Gamma)^{1/3} A \tag{28.16}$$

(因为 $M \doteqdot 1$，所以在(28.5)的 $M-1$ 和(28.16)的 M^2-1 之間沒有本质上的差别)。压力系数和其他各种系数的表达式如下：

[1] Spreiter: NACA TN 2726 (1952).

$$\left.\begin{aligned}
C_p &= \frac{\tau^{2/3}}{\Gamma^{1/3}} P\left[K, H, \frac{x}{c}, \frac{y}{b}\right], (b \text{ 是翼展}) \\
C_L &= \frac{\tau^{2/3}}{\Gamma^{1/3}} L[K, H], \\
C_D &= \frac{\tau^{5/3}}{\Gamma^{1/3}} D[K, H], \\
C_M &= \frac{\tau^{2/3}}{\Gamma^{1/3}} N[K, H],
\end{aligned}\right\} \quad (28.17)$$

这里 P, L, … 等的意义同前。

§29 跨声速方程的解析处理

跨声速势函数方程(27.7)或(27.12)是非綫性的，其数学处理非常困难。最近 Oswatitsch 及其他諸人[1] 将 Green 定理应用于物理平面的跨声速方程而导出非綫性积分方程，根据物理考察而得到的一些假定，近似地求該方程的解。这样的方法正在发展中，但在数学上还是不完全的。現阶段对偏微分方程所能决定的現象的分析，差不多还仅局限在基本方程是綫性的情形。对于跨声速問題也是同样，至今为止所求得的物体周圍的跨声速流的解，都是从速度图方程(27.17)出发的。速度图方程在跨声速时当然也是綫性的，因此数学上处理比較容易。但正如§7所述，用速度图法可以处理的流动仅限于二維流动。此外，物理平面上給出的边界条件

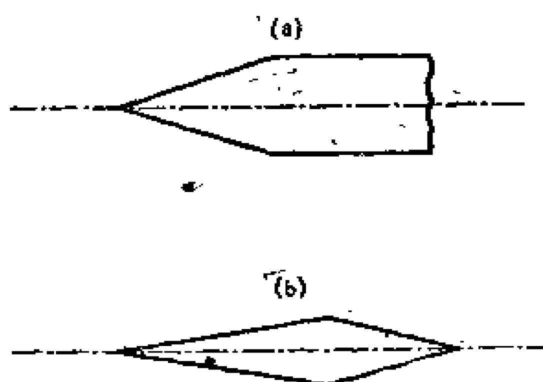


图 29.1 (a)半楔机翼 (b)双楔机翼

[1] Oswatitsch: Z. a. M. M., **30** (1950).
Gullstrand: K. T. H. Aero. TN **20** (1951), **24** (1952).

一般地不可能預先移到速度图平面上去，所以只能对于某些特殊形状的物体才能求得跨声速解。到現在为止所处理的物体几乎只是如图 29.1 所示的半楔机翼和双楔机翼两种。对于这样的机翼，因为物体表面的方向不变，而且声速点常出現在楔的肩上，所以为了求解，事先在速度图平面上給出边界条件是可能的。下面以将处在高亚声速流($M<1$)中的半楔机翼的解法[1]为例进行說明。

和§27的 Kármán 方法同样，設临界速度 a^* 为基础所产生的扰动速度分量在 x 方向(来流方向)是 u_1，在 y 方向是 u_2，則跨声速方程(27.7)可写为

$$[(\gamma+1)/a^*]u_1\partial u_1/\partial x-\partial u_2/\partial y=0 \tag{29.1}$$

又由无旋条件，可得

$$\partial u_1/\partial y-\partial u_2/\partial x=0. \tag{29.2}$$

現在利用由

$$u=[(\gamma+1)/a^*]u_1=-w,\quad v=[(\gamma+1)/a^*]u_2 \tag{29.3}$$

所定义的无量綱速度分量 u, v，則上列二式可簡单地写为

$$uu_x-v_y=0,\quad u_x-v_y=0. \tag{29.4}$$

其次交換此式的独立变量和未知函数，而考虑 $x=x(u, v)$，$y=y(u, v)$，这个变換可由

$$\left.\begin{aligned}x_u=(1/J)v_y,\quad & y_u=-(1/J)v_x,\\ x_v=-(1/J)u_y,\quad & y_v=(1/J)u_x,\\ J=\partial(u, v)&/\partial(x, y)\end{aligned}\right\} \tag{29.5}$$

給出。用变換(29.5)可将(29.4)变为

$$uy_v-x_u=0,\quad x_v-y_u=0, \tag{29.6}$$

(29.6)和前边求得的速度图方程(27.17)是同等的。更設 $u=-w$，由(29.6)消去 x，則得跨声速的速度图方程为

$$wy_{vv}+y_{ww}=0. \tag{29.7}$$

[1] Cole: J. Math. Phys., **30** (1951), 79.

根据变数分离法可知(29.7)的特解为

$$\left.\begin{array}{l} y \sim e^{\pm\lambda v} z^{1/3} C_{1/3}(\lambda z) \\ z=(2/3) w^{3/2}. \end{array}\right\} \tag{29.8}$$

設所处理的物体如图 29.2 所示，是平行地处在流动里的半楔机翼，其半頂角是 δ。令来流的 Mach 数 M_∞ 小于 1. 边界条件是

在无穷远：
$$w=1-M_\infty^2=w_1=\left[\frac{3}{2} z_1\right]^{2/3}, \tag{29.9}$$

在物体上($y=0$, $0<x<1$)：

$$v=v_0=(\gamma+1)\delta, \tag{29.10}$$

最后的关系式是在跨声速近似里从 $M_\infty^2-1=(\gamma+1)(U/a^*)$ 求出来的。物体对于 x 軸是对称的，所以只須考虑 $y\geqslant0$ 的半平面就够了。

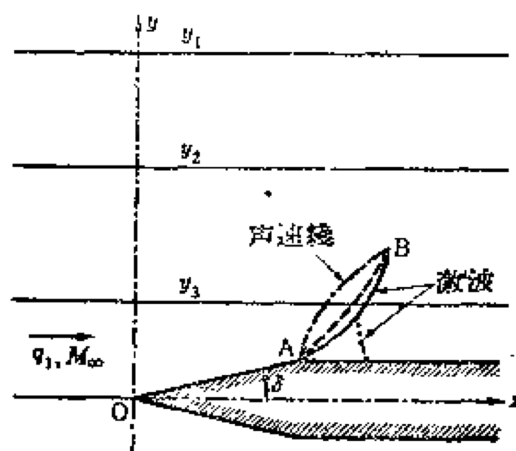


图 29.2 半楔机翼周圍的流动

我們考虑将这样的半楔机翼放置在亚声速流中时翼面上的流动。首先在翼的尖端产生駐点，速度变为 0。在楔上流动的方向不变，而流速却是逐渐增加的，在具有尖銳角的肩上($x=1$)恰好达到声速。这个事实也是 Cole 和其他諸人所証明的。流动在該处作 Prandtl-Meyer 膨脹(参照 § 23)而变成超声速，在其下游产生激波再回到亚声速。在肩的附近所产生的超声速部分如图 29.2 所示。将物理平面上 $y=$ 常数的曲綫(图 29.2 的 y_1, y_2, y_3)变到 wv 平面上时，則得到如图里所表示的那种情况。其中 y_3 曲綫跨过声速綫($u=0$)进入超声速区域($u>0$)，由于激波再回到 $u<0$ 的平面来。速度图平面上的边界条件由物理平面上的 $y=0$

所給出。已經假定机翼的厚度是薄的，所以在楔面上的条件看作为在 $y=0$ 的条件时也无多大差异。于是在 $y=0$ 有

$$\left.\begin{array}{ll} x<0 \text{ 及 } x>1 \text{ 时：} & v=0, \\ x=0 \text{ 时：} & u=-w=-\infty, \\ 0<x<1 \text{ 时：} & v=v_0=(\gamma+1)\delta, \\ x=1 \text{ 时：} & u=-w=0, \quad v=v_0. \end{array}\right\} \quad (29.11)$$

第二个条件表示在跨声速近似的范圍里駐点的状态。(29.11) 是物理平面上的边界条件，所以若将它表示成速度图平面上的条件时，则得

$$\left.\begin{array}{ll} v=0,\ w>0 \text{ 时：} & y=0, \\ v=v_0,\ w>0 \text{ 时：} & y=0, \\ w\to\infty \text{ 时：} & y=0,\ x=0, \\ v=v_0,\ w=0 \text{ 时：} & x=1, \end{array}\right\} \quad (29.12)$$

这样的边界条件表示在图 29.3 中。

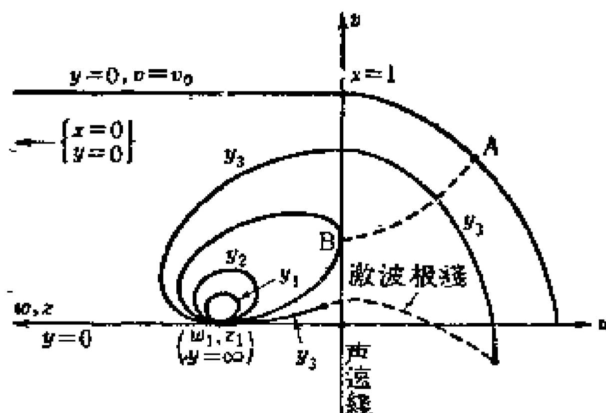


图 29.3 半楔机翼周圍的流动(速度图)

Tricomi 型方程(29.7)的解在严格意义下仅用边界条件(29.12)是不能决定的，还必須要求在超声速区域 ($u>0$) 里的条件。但 Cole 认为超声速区域給予 $x<1$ 的部分上的影响是小的，于是求得了使声速綫变为 $x=1$ 的解。

首先，亚声速区域($u<0$)內奇点之一是无穷远点($w=w_1$)。由

图 29.3 可知，y＝常数的曲綫在速度图平面上都是从該无穷远点出发而又回到該点的。这样流动的性质，将无穷远点看作具有偶极子的奇性的点时是可以得到满足的。在用由(29.8)所表示的基本解的迭加而求得的解中，在$z=z_1$，$v=0$具有偶极子的奇性的解，可用下列积分表示式給出：

$$y(z,\ v)=Az^{1/3}z_1\int_0^\infty \frac{\sinh\lambda(v_0-v)}{\sinh\lambda v_0}J_{-1/3}(\lambda z)J_{-1/3}(\lambda z_1)\lambda d\lambda, \quad (29.13)$$

此式满足(29.12)的第一及第二条件。

其次，用满足(29.12)的第四条件来决定A的值。由(29.5)及(29.6)的第二式，有

$$\frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{\partial y}{\partial w}=-\sqrt{w}\frac{\partial y}{\partial z}=-\left(\frac{3}{2}z\right)^{1/3}\frac{\partial y}{\partial z},$$

将(29.13)代入此式，对v的积分，可得

$$x=x_1(z)-\left(\frac{3}{2}\right)^{1/3}Az_1z^{2/3}\int_0^\infty \frac{\cosh\lambda(v_0-v)}{\sinh\lambda v_0}J_{-1/3}(\lambda z_1)J_{2/3}(\lambda z)\ \lambda d\lambda,$$

在此考虑(29.6)的第一式，可知x_1是常数。为了利用楔肩($x=1$)的条件[(24.12)的第四式]，令$v=v_0$，則

$$x(z,\ v_0)=x_1-\left(\frac{3}{2}\right)^{1/3}Az_1z^{2/3}\int_0^\infty \operatorname{cosech}\lambda v_0 J_{-1/3}(\lambda z_1)J_{2/3}(\lambda z)\lambda d\lambda, \quad (29.14)$$

令$z\to 0$，則

$$x(0,\ v_0)=x_1,$$

于是由(24.12)的第四式有$x_1=1$。

其次，当$z>z_1>0$时，(29.14)可改写如下(設$x_1=1$)：

$$\begin{aligned}x(z,\ v_0)=1&-\left(\frac{3}{2}\right)^{1/3}Az_1z^{2/3}\frac{2}{v_0}\\&\cdot\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left(\frac{m\pi}{v_0}\right)K_{2/3}\left(\frac{m\pi z}{v_0}\right)I_{1/3}\left(\frac{m\pi z_1}{v_0}\right)\\&-\left(\frac{3}{2}\right)^{1/3}Az_1z^{2/3}\frac{1}{v_0z^{2/3}z_1^{1/3}}\end{aligned}$$

在$Z\to\infty$时考虑到$K_v(Z)=\sqrt{\pi/2Z}e^{-Z}+\cdots$，则为了使(29.12)第三式的条件得到满足，必须有

$$A=(2/3)^{1/3}z_1^{-2/3}v_0, \qquad (29.15)$$

这样就决定了所有的常数而得到满足給定条件及在无穷远点有奇性的解。但此解在超声速区域里是否满足准确的边界条件却不知道。于是在全区域里成立的解可以用这里已求得的特解再加上某些正則解表示出来。但在实用上可认为将后一部分略去也无妨。在这个解里有$x(0, v)=1$，故实际上表示使声速綫为$x=1$的解。

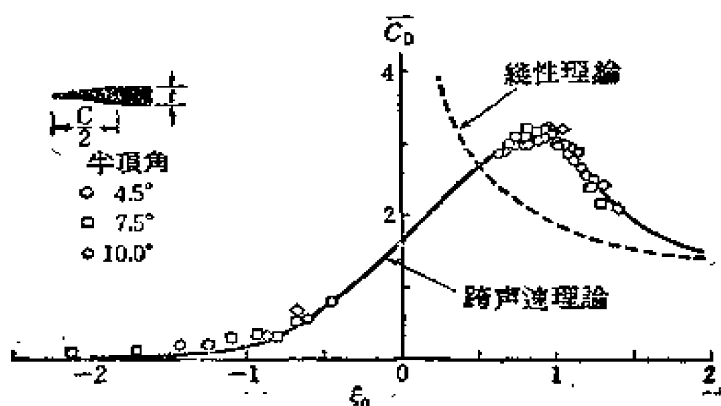


图 29.4　半楔机翼的压差阻力

$$\overline{C}_D=\frac{[(\gamma-1)M^2]^{1/3}}{(t/c)^{5/3}}C_D, \qquad \xi_0=\frac{M^2-1}{[(\gamma-1)M^2(t/c)]^{2/3}}$$

半楔机翼及双楔机翼（每个都是零攻角的）周圍的跨声速流，在速度图平面上的边界条件是可以預先給出来的，所以理論的分析成为可能，对于$M_\infty<1$，$=1$，>1各种情形的解已被求出来了。在图29.4及图29.5中表示，根据理論計算得到的这些机翼的依跨声速来表示的阻力系数。为了便于比較，在每一个图上都添上了实驗值。

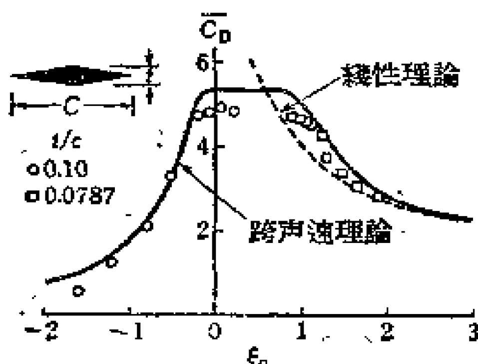


图 29.5　双楔机翼的压差阻力，$\overline{C}_D$，ξ_0同图29.4

参 考 文 献

写本书时参考的主要著作(包括綜合性論文)如下:

[1] Busemann, A.: Gasdynamik. Handbuch der Experimentalphysik. Bd. 4, 1. Teil. Akademische Verlagsgesellschaft M. B. H., Leibzig, 1931.

[2] Lamb, H.: Hydrodynamics, Cambridge, 1932.

[3] Taylor, G. I. and Maccoll, J. W.: The Mechanics of Compressible Fluids. Aerodynamic Theory (Editor: Durand, W. F.), III, Julius Springer, Berlin, 1935.

[4] Liepmann, H. W. & Puckett, A. E.: Introduction to Aerodynamics of a Compressible Fluid, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1947.

[5] Ferri, A.: Elements of Aerodynamics of Supersonic Flows, The Mac-Millan Co., New York, 1949.(有中譯本)

[6] Sauer, R.: Einfuehrung in die theoretische Gasdynamik, Springer-Verlag, Berlin, 1951.

[7] Oswatitsch, K.: Gasdynamik, Springer-Verlag, Wien, 1952.

[8] Shapiro, A. H.: The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow. 1 and 2, The Ronald Press Co., New York, 1953.

[9] Howarth, L.(Editor): Modern Developments in Fluid Dynamics. High Speed Flow, 1 and 2, Oxford, 1953.(有中譯本)

[10] Sears, W. R.(Editor): General Theory of High Speed Aerodynamics. High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion, VI, Princeton Univ. Press, Princeton, 1954.(有中譯本)

[11] Millikan, C. B.: Compressible Fluid Course Lecture Notes, C. I. T., 1952~1953.

[12] Ward, G. N.: Linearized Theory of Steady High-Speed Flow, Cambridge, 1955.

[13] von Kármán, T.: The Problem of Resistance in Compressible Fluids. Proc. 5th Volta Congress, Rome, 1935, 255.

[14] von Kármán, T.: Compressibility Effects in Aerodynamics. J. Aero. Sci., 8, No. 9 (1941), 337.

[15] von Kármán, T.: Supersonic Aerodynamics-Principles and Applications. J. Aero. Sci., **14**, No. 7 (1947), 373.

校后記

谷超豪

河村龙馬的这本著作，对空气动力学的基本理論作了系統的叙述。全书限于討論理想气体，是用应用数学的观点来写的，有如下的一些特点：

第一，叙述的系統比較清楚，从基本方程和激波理論开始，在介紹了一些准确解后就轉入綫性化理論的討論，叙述了超声速二維流动，軸对称流动及有限翼展理論，錐型流理論，最后并对跨声速流作了一些介紹。

第二，对所討論的問題的提法都比較完全、明确，数学上的归結和論証，也都比較清楚，特别是对那些应用数学方法最为成功的部分，如超声速机翼理論，錐型流理論，就讲述得更为詳細一些。

在閱讀了本书之后，就可以对空气动力学中的一些最基础的內容有初步的了解，讀者只要对流体力学已有初步基础，而且对偏微分方程也有一定的了解，那末閱讀本书就沒有特别的困难。

另一方面，由于空气动力学在最近一二十年来的发展非常迅速，內容日趋丰富，即使是限于理想气体而言，情况也是如此。在綫性化理論方面也有許多新的內容，例如細长体理論，組合体的問題，不定常气流等等；在非綫性的理論方面，发展更为迅速，无論是典型的气流的分析，或者是一些复杂問題的計算方法，均有很大的进步，而且在高超声速的范圍內的研究也已日趋成熟。本书限于篇幅及性质，自然不可能对这些問題作詳細的介紹。但在所討論的內容中，例子举得太少，因而难以从本书中获得具体的感性的材

料；又物理的基础也叙述得过分粗略，这都是一些不足之处。但后者，如果我們是限于理想气体的宏观性质的話，可以从流体力学的一些教程中得到补充。

在所叙述的內容上也有一些地方需要加以修正，例如关于旋轉体表面上的压力系数的公式，关于超声速流动連續地轉为亚声速的可能性等，已在有关部分作了注釋。

为了便于依不同目的作进一步的钻研，在这里就校者自己的理解介紹一些文献，以供讀者参考：

一、为了进一步了解理想气体动力学的非綫性理論的主要內容，可以推荐专著[1]和[2]，在[2]中的探討更为深入，但它只限于超声速的情形。

二、在綫性化理論方面，对机翼，細长体，机身机翼組合体方面都有很大的发展，它們的概况可見[3]及[4]，不定常的情况可詳見[5]，关于机翼方面，在[6]，[7]中有詳細討論，至于錐型流方面，可參考专著[8]及論文集[9]。在[10]中也从应用的角度叙述了有关的理論。

三、跨声速理論方面可見专著[11]，它的数学基础是混合型偏微分方程，在[12]中有概况的叙述，并有較完全的文献。

四、本书完全未涉及高超声速方面的理論，在这一方面也可推荐专著[13]，[14]。

参 考 文 献

[1] A. B. 別洛娃，气体动力学讲义，吳望一、吳鴻庆譯，科学出版社，1956.

[2] R. Courant, K. O. Friedrichs, Supersonic Flow and Shock Waves, Interscience Publishers, 1956.（有俄譯本）

[3] 見原书参考文献[10].（有中譯本，安继光譯，国防工业出版社，1960）

[4] 見原书参考文献[12].

[5] John W. Milles, The Potential Theory of Unsteady Supersonic Flow,

Cambridge, 1959.

[6] Е. А. Красильщикова, Крыло конечного размаха в сжимаемом поток, ГИТТЛ, 1952.

[7] K. R. Dorfner, Dreidimensionale überschallprobleme der Gasdynamik, Springer-Verlag, 1957.

[8] E. Carafoli, Aerodynamics of Higher Speeds, 1956.(有俄譯本)

[9] 艾·卡拉弗里,超音速錐型流，郑哲敏等譯,科学出版社，1956.

[10] J. N. Nielsen, Missile aerodynamics, McGraw-Hill Book Company, 1960.

[11] K. G. Guderley, Theory Schallnaher Stromunger, Springer-Verlag, 1957.(有俄譯本)

[12] L. Bers, Mathematical Aspects of Subsonic and Transonic Gas Dynamics, John Wiley & Son, 1958. (有俄譯本)

[13] W. D. Hayes and R. F. Probstein, Hypersonic Flow Theory, Academic Press, 1959.

[14] Г. Г. Черный, Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью, Физматгиз, 1959.